Universidad de Valparaíso
CHILE
Tradición Excelencia Innovación

Introducción al Cálculo

Daniel Jiménez.

Tercera Versión
2013

Índice general

1. Los Números Reales **4**
1.1. Introducción 4
1.2. Grupo 6
1.3. Números Reales $\mathbb{R}$ 7
1.3.1. Axiomas de $\mathbb{R}$ como cuerpo 7
1.3.2. Potencias Enteras 12
1.3.3. Productos Notables 13
1.3.4. Sistemas de Ecuaciones Lineales 14
1.3.5. Problemas de Planteo 17
1.4. $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado 21
1.4.1. Axiomas de Orden 21
1.4.2. Raíz n-ésima 25
1.4.3. Ecuación de Segundo Grado 30
1.4.4. Valor Absoluto 38
1.4.5. Inecuaciones 42
1.5. Axioma del Supremo 56
1.5.1. Axioma del Supremo 59
1.6. Ejercicios Propuestos 62

2. Geometría Analítica **71**
2.1. Introducción 71
2.2. Plano Cartesiano 71
2.2.1. Distancia entre dos Puntos 72
2.2.2. Punto Medio 75
2.2.3. Puntos Colineales 76
2.3. Ecuación de la Recta 78
2.3.1. Rectas Paralelas o Perpendiculares 87
2.3.2. Distancia de un Punto a una Recta 90
2.3.3. Ejercicios Propuestos 92
2.4. La Circunferencia 94
2.4.1. Tangencia de una recta a la circunferencia 96
2.4.2. Intersección entre una recta y una circunferencia 98
2.4.3. Ejercicios Propuestos 102
2.5. Parábola 103
2.5.1. Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje X 104

2.5.2. Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje Y 106
2.5.3. Ejercicios Propuestos 112
2.6. Elipse 113
2.6.1. Ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje X 114
2.6.2. Ecuación de la elipse con eje focal en el eje Y 118
2.6.3. Ejercicios Propuestos 123
2.7. Hipérbola 124
2.7.1. Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje X 125
2.7.2. Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje Y 128
2.7.3. Asíntotas de la hipérbola 130
2.7.4. Ejercicios Propuestos 133

3. Funciones 135
3.1. Introducción 135
3.1.1. Relaciones 135
3.2. Función 137
3.2.1. Ejercicios Resueltos 144
3.2.2. Representación Gráfica 147
3.3. Modelación 148
3.3.1. Ejercicios Propuestos 151
3.4. Tipos de Funciones 152
3.4.1. Álgebra de Funciones 156
3.4.2. Ejercicios Propuestos 162
3.4.3. Funciones Crecientes y Decrecientes 163
3.4.4. Funciones Biyectivas 164
3.4.5. Función Inversa 170
3.4.6. Ejercicios Propuestos 175
3.5. Funciones Exponenciales 176
3.5.1. Funciones Logarítmicas 177
3.5.2. Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas 179
3.5.3. Inecuaciones Exponenciales y Logarítmicas 180
3.5.4. Ejercicios Propuestos 182

4. Trigonometría 185
4.1. Introducción 185
4.2. Funciones Trigonométricas 186
4.2.1. Identidades Trigonométricas 196
4.2.2. Ejercicios Propuestos 199
4.3. Funciones Trigonométricas Inversas 200
4.3.1. Ecuaciones Trigonométricas 201
4.4. Funciones Trigonométricas en Triángulos 205
4.4.1. Triángulo Rectángulo 205
4.4.2. Ley del Seno 207
4.4.3. Teorema del Coseno 208
4.5. Ejercicios Propuestos 212

Introducción

La primera versión del presente apunte, corresponde a un trabajo de recopilación realizado por los alumnos Victor Bravo, Elena Orellana y Ambar Toledo de la Carrera de Matemáticas de nuestra Universidad durante el año 2008.

El material se obtuvo de distintos años en que fue dictada la asignatura de Introducción al Calculo y el trabajo consistió en darle una presentación coherente a los diferentes borradores seleccionados.

Capítulo 1

Los Números Reales

1.1. Introducción

A continuación presentaremos los números reales $\mathbb{R}$, de manera axiomática, esto es, aceptaremos que existe un conjunto, el de los números reales, el cual bajo las operaciones de suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ verifica ciertas propiedades.

Comenzaremos recordando algunas de las propiedades que satisfacen algunos conjuntos notables.

Consideremos en primer lugar el conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

llamado conjunto de los **Números Naturales**, este conjunto provisto de la operación producto $(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

1. **Clausura:** Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n \cdot m$ es un único elemento en $\mathbb{N}$.

2. **Asociatividad:** Para todo $n, m, r \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(n \cdot m) \cdot r = n \cdot (m \cdot r).$$

3. **Existencia de neutro:** Existe $e = 1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

4. **Conmutatividad:** Para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Pero en $\mathbb{N}$ no se verifica la propiedad de **existencia de inverso multiplicativo**, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $n' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \cdot n' = 1.$$

Si consideramos ahora la operación suma (+) en $\mathbb{N}$, tenemos que esta verifica (1), (2), (3) y (4). Del mismo modo, no cumple la propiedad del inverso aditivo, esto es, dado $n \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n + m = 0.$$

Consideremos ahora el conjunto de los **Números Enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

este conjunto lo podemos expresar en términos del conjunto anterior, esto es

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-,$$

donde

$$\mathbb{N}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto bajo la suma verifica las siguientes propiedades:

1. **Clausura:** Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a + b$ es un único elemento en $\mathbb{Z}$.

2. **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. **Existencia de neutro:** Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$

$$0 + a = a + 0 = a.$$

4. **Existencia de elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $(-a) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

5. **Conmutatividad:** Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a + b = b + a.$$

Ahora bien, si consideramos la operación producto $(\cdot)$ en $\mathbb{Z}$ esta verifica (1),(2),(3) y (5). Sin embargo no se verifica (4) pues en general para $a \in \mathbb{Z}$ no existe $a^{'} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a \cdot a^{'} = 1.$$

El hecho de que $\mathbb{Z}$ con la operación suma (+) satisface las propiedades antes mencionadas se resume diciendo que $\mathbb{Z}$ con la suma es un grupo.

Consideremos

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

el cual recibe el nombre de conjunto de los **Números Racionales.**

Se definen en él las siguientes operaciones:

1. Suma
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$
2. Producto
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Con estas operaciones se tiene que, $\mathbb{Q}$ con $(+)$ y $\mathbb{Q}-\{0\}$ con $(\cdot)$ son grupos, es decir, satisfacen las propiedades de **clausura, asociatividad, existencia de neutro y existencia de inverso**, además se verifica la **conmutatividad**.

Otro conjunto notable es el conjunto de los **Números Irracionales** que usualmente es denotado por $\mathbb{I}$.

Algunos ejemplos de números irracionales son:
$$\pi, \quad e, \quad \sqrt{2}.$$

Observación. El conjunto $\mathbb{I}$ con la operación $(+)$ no satisface la propiedad de clausura, en efecto, consideremos los irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, tenemos que $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, el cual es un número racional ($0=\frac{0}{1}$ por ejemplo), de esto es evidente que $\mathbb{I}$ no es un grupo.

1.2. Grupo

Definición 1 *Sea G un conjunto no vacío. Diremos que $*$ es una operación binaria o clausura en G si para todo a,b en G existe un único $a*b$ en G, es decir*
$$(\forall a,b\in G)(\exists!\, c\in G)(a*b=c).$$

Definición 2 *Un* grupo *es un conjunto no vacío G y una operación binaria $*$, tal que para todo a,b y c en G se cumplen los siguientes:*

i) Asociatividad

Para todo a,b,c en G, se cumple
$$a*(b*c)=(a*b)*c.$$
En símbolos
$$(\forall a,b,c\in G)(a*(b*c)=(a*b)*c).$$

ii) Existencia de elemento neutro

Existe e elemento neutro de G, tal que para todo a en G, se cumple
$$a*e=a=e*a.$$
En símbolos
$$(\exists\, e\in G)(\forall a\in G)(a*e=a=e*a).$$

iii) Existencia de elemento inverso

Para todo a en G, existe b en G, tal que
$$a*b=e=b*a.$$

En símbolos

$$(\forall a \in G)(\exists\, b \in G)(a * b = e = b * a).$$

En adelante diremos que $(G, *)$ *es un grupo, para indicar que* G *con la operación* $*$ *es un grupo.*

Diremos que G *es un* grupo abeliano *o conmutativo, si y sólo si* $(G, *)$ *es un grupo y satisface la propiedad de* **conmutatividad**, *esto es:*

$$(\forall a, b \in G)(a * b = b * a).$$

Propiedad 1 *Sea* G *un grupo entonces*

1. *El elemento* $e \in G$ *es único.*
2. *El inverso de un elemento es único*

Ejemplo 1 *Los conjuntos* $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{Q}$ *con la suma habitual de números son grupos abelianos. Con la multiplicación usual el conjunto* $\mathbb{Q} - \{0\}$ *es también un grupo abeliano.*

Ejemplo 2 *Sea* X *un conjunto no vacío y definamos*

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{Q}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{Q} \mid f \textit{ es una función}\}$$

el conjunto de todas las funciones[1] *de* X *en* $\mathbb{Q}$ *y la suma* $(+)$ *definida por:*

$$\begin{array}{rcrcl} f+g & : & X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & x & \longmapsto & (f+g)(x) := f(x) + g(x) \end{array}$$

entonces $\mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$ *es un grupo. La demostración sera vista en el capítulo de funciones*

1.3. Números Reales $\mathbb{R}$

1.3.1. Axiomas de $\mathbb{R}$ como cuerpo

Existe un conjunto que denotaremos por $\mathbb{R}$ no vacío, cuyos elementos serán llamados **números reales**, en el cual están definidas las operaciones binarias suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, que satisfacen las siguientes propiedades:

Axioma 1 $0, 1 \in \mathbb{R},\ 0 \neq 1.$

Axioma 2 $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 3 $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 4 *Distributividad:*

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c).$$

[1] La definición del concepto “función”será visto con detalle en el capítulo siguiente.

Ya que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o $\mathbb{R}$ satisface estas propiedades con las operaciones dadas, se dice que $\mathbb{R}$ es un **cuerpo**.

Notación: Si no hay peligro de confusión en adelante anotaremos sólo "ab", para referirnos al producto "$a \cdot b$", con $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación: A la propiedad Distributiva, también se le denomina *Factorización*, en los casos cuando hay sumando que tiene un factor en común.

Propiedad 2 *En $\mathbb{R}$ tenemos que:*

1. *El neutro aditivo de un número real es único.*
2. *El neutro multiplicativo de un número real es único.*
3. *El inverso aditivo de un número real es único.*
4. *El inverso multiplicativo de un número real no nulo es único.*

Demostración: Supongamos que 0 y $0'$ son neutros aditivos, luego $0 + 0' = 0$, ya que 0 es el neutro, del mismo modo $0 + 0' = 0'$, y además la suma es única. luego

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

Ahora supongamos que dado $a \in \mathbb{R}$, los números $b,\ b'$ son los inversos, luego $a + b' = 0$ y $b + a = 0$, de la propiedad asociatividad tenemos

$$\begin{aligned} b + (a + b') &= (b + a) + b' \\ b + 0 &= 0 + b' \\ b &= b' \end{aligned}$$

Las otras proposiciones se demuestran de manera similar $\square$

Notaciones: $-a$ denota el inverso aditivo de a para todo $a \in \mathbb{R}$ y b^{-1} denota el inverso multiplicativo de b, con $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observación: Un técnica de demostración bastante utilizada es el llamada *método del absurdo*. Este método muy útil para demostrar proposiciones del tipo $p \Rightarrow q$. Notemos que

$$\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}.$$

El propósito es suponer que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es verdadera, a partir de ello llegar a una contradicción, esto significa que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es falsa y por lo tanto $\overline{p \wedge \overline{q}}$ es verdadera, de otro modo que $p \Rightarrow q$ es verdadero.

Ejemplo 3 *Si m^2 es par, entonces m es par.*

Demostración: Procedamos por absurdo.

Supongamos m^2 par y m impar. Como m es impar entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = 2k + 1$$

de esto tenemos que

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

luego $m^2 = 2k' + 1$, con $k' = 2k^2 + 2k$, $k' \in \mathbb{Z}$ de donde obtenemos que m^2 es un número impar, lo que contradice nuestro supuesto de que m^2 es par, así

$$m^2 \text{ par} \quad \Rightarrow \quad m \text{ par.} \tag{1.1}$$

$\square$

Propiedad 3 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

1. $-(a+b) = (-a) + (-b)$.
2. $-(-a) = a$.
3. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad a \neq 0, b \neq 0$.
4. $(a^{-1})^{-1} = a$.
5. $a \cdot 0 = 0$.
6. $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.
7. $(-a)(-b) = ab$.
8. $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$.

Demostración:

1. Sean a y b números reales, entonces también lo es $a + b$ y como $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano, entonces existe $-(a+b)$ inverso aditivo de $a + b$ por lo tanto

   $$(a+b) + (-(a+b)) = 0. \tag{1.2}$$

   Por otra parte, también existen $-a$ y $-b$ tales que:

   $$\begin{aligned} (a+b) + (-a) + (-b) &= (a + (-a)) + (b + (-b)) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   de esta última igualdad podemos concluir que $(-a) + (-b)$ es también inverso de $a + b$ y luego por unicidad del inverso tenemos que

   $$-(a+b) = (-a) + (-b).$$

2. Como $(-a)$ es un número real y $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano, entonces existe $-(-a)$ inverso aditivo de $(-a)$ tal que

$$(-a)+(-(-a))=0.$$

Por otro lado

$$(-a)+a=0,$$

de estas igualdades obtenemos que $-(-a)$ y a son inversos de $(-a)$, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(-a)=a.$$

3. Análoga a (1), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

4. Análoga a (2), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

5. Como 0 es neutro aditivo se tiene que:

$$0=0+0,$$

entonces por distributividad tenemos

$$a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$$

luego,

$$a\cdot 0 \;=\; a\cdot 0+a\cdot 0. \tag{1.3}$$

Ahora, sumando a ambos lados de la igualdad en (1.3) el inverso aditivo de $a\cdot 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} a\cdot 0+(-(a\cdot 0)) &= a\cdot 0+a\cdot 0+(-(a\cdot 0)) \\ 0 &= a\cdot 0+(a\cdot 0+(-(a\cdot 0))) \\ 0 &= a\cdot 0+0 \\ 0 &= a\cdot 0 \end{aligned}$$

así,

$$a\cdot 0 \;=\; 0. \tag{1.4}$$

6. Es claro que

$$ab+(-(ab)) \;=\; 0. \tag{1.5}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ab+(-a)b &= (a+(-a))b \\ &= 0\cdot b \\ &= 0 \quad \text{(por (1.4))} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que tanto $(-a)b$ como $-(ab)$ son inversos de ab, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(ab) = (-a)b \tag{1.6}$$

Además, por conmutatividad en (1.6) se tiene

$$\begin{aligned} -(ab) &= -(ba) \\ &= (-b)a \\ &= a(-b) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(-a)b = -(ab) = a(-b).$$

7. Notemos que

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(a(-b)) && \text{(usando (6))} \\ &= -(-(ab)) && \text{(usando (6))} \\ &= ab && \text{(usando (2))} \end{aligned}$$

luego,

$$(-a)(-b) = ab.$$

8. $(\Rightarrow)$ Observemos que

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

es una proposición del tipo $p \Rightarrow (q \vee r)$, la cual es equivalente[2] a $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r$, que es lo que usaremos para probar esta parte de la demostración.

Supongamos entonces $a \neq 0$, luego existe a^{-1} tal que

$$\begin{aligned} ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a^{-1}ab &= a^{-1}0 \\ \Rightarrow \quad 1 \cdot b &= 0 \\ \Rightarrow \quad b &= 0. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Claramente si $a = 0 \vee b = 0$ se tiene que $ab = 0$.

Concluyendo así la demostración.

$\square$

Notación: También debemos tener presente

$$a \cdot b^{-1} = ab^{-1} = \frac{a}{b} = a : b$$

Con la notación anterior, y las propiedades demostrada tenemos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

[2]Este hecho se verá con detalle en el curso de Matemáticas Generales.

Ejemplo 4 *Reemplazar* $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{3}$ *en*

$$x = \frac{ab - a}{a + 1}$$

Solución:

$$x = \frac{ab - a}{a + 1} = \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2} + 1} = \frac{\frac{-1}{6} - \frac{-1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-1+3}{6}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

$\square$

1.3.2. Potencias Enteras

Definición 3 *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{Z}^+$. *Se define la potencia real de base* a *y exponente* n *por:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-veces}$$

Más precisamente, sea $a \in \mathbb{R}$, *se define por recurrencia*

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Además para el caso $a \neq 0$, *se define*

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= (a^{-1})^n = \frac{1}{(a)^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-veces}}} \end{aligned}$$

Teorema 4 *Sean* $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ *y* $n, m \in \mathbb{Z}$ *entonces:*

1. $a^{m+n} = a^m a^n$.
2. $a^n b^n = (ab)^n$.
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.
5. $(a^n)^m = a^{nm}$.

Demostración: Probaremos sólo (1) quedando las demás propiedades como ejercicio. Procederemos por inducción[3] como sigue.

Sea $p(n) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n); \quad n \in \mathbb{N}_0$

[3]Técnica de demostración que será vista con detalle en el curso de Matemáticas Generales.

$$p(0) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+0} = a^m a^0)$$

lo cual es verdadero por definición de potencia.

Supongamos $p(n)$ verdadero y demostremos que $p(n+1)$ es verdadero.

$$p(n+1) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n+1} = a^m a^{n+1})$$

$$\begin{array}{rcll} a^{m+n+1} & = & a^{m+n}a & \text{(definición de potencia)} \\ & = & (a^m a^n)a & \text{(hipotesis de inducción)} \\ & = & a^m(a^n a) & \text{(asociatividad)} \\ & = & a^m a^{n+1} & \text{(definición de potencia)} \end{array}$$

tenemos entonces que

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n) \tag{1.7}$$

es verdadero por teorema de inducción.

Sea $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}_0$, luego

$$\begin{array}{rcll} a^{m+n} & = & a^{m-(-n)} & \\ & = & a^{-(-m+(-n))} & \\ & = & (a^{-1})^{-m+(-n)} & \\ & = & (a^{-1})^{-m}(a^{-1})^{-n} & \text{(por (1.7))} \\ & = & a^m a^n & \end{array}$$

de este modo podemos concluir que

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n).$$

$\square$

Observación: Las propiedades antes mencionadas son válidas para el caso $a = 0$ o $b = 0$, siempre que las expresiones que las definen tengan sentido en $\mathbb{R}$.

1.3.3. Productos Notables

De acuerdo a las propiedades de potencias y axiomas de los números reales tenemos la siguiente lista de productos notables:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
5. $(\forall m \in \mathbb{Z}^+)(\, a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})\,)$.

Ejemplo 5 *Simplificar completamente, para los valores de $a \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:*

$$X = \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}}.$$

Solución: Sea $a \in \mathbb{R}$, tal que la expresión está bien definida, luego podemos simplificar.

$$\begin{aligned} X &= \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}} \\ &= \frac{\dfrac{a^2+(1-a)^2}{a(1-a)}}{\dfrac{(1-a)^2-a^2}{a(1-a)}} \\ &= \frac{a^2+(1-a)^2}{a(1-a)} \frac{a(1-a)}{(1-a)^2-a^2} \\ &= \frac{a^2+(1-a)^2}{(1-a)^2-a^2} \\ &= \frac{2a^2-2a+1}{1-2a}. \end{aligned}$$

□

1.3.4. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición 4 *Una ecuación lineal en la variable x, es una expresión del tipo*

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \tag{1.8}$$

Encontrar el conjunto solución para una ecuación de este tipo, corresponde a determinar $x \in \mathbb{R}$ de modo que la igualdad en (1.8) se verifique.

Determinemos ahora la solución de (1.8)

$$\begin{aligned} & ax+b &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow & \quad ax &=& \ -b \\ \Leftrightarrow & \quad x &=& \ -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación(1.8) es

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}. \tag{1.9}$$

Ejemplo 6 *Determinar la solución de la ecuación*

$$4x - 3\pi = 5\sqrt{2} - 8x.$$

Solución: Primero debemos llevar esta ecuación a la forma dada en (1.8) obteniendo

$$\begin{array}{rrcl} & 4x-3\pi & = & 5\sqrt{2}-8x \\ \Leftrightarrow & 4x+8x-3\pi-5\sqrt{2} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 12x+(-3\pi-5\sqrt{2}) & = & 0 \end{array}$$

ahora despejando tenemos que la solución esta dada por

$$x=\frac{3\pi+5\sqrt{2}}{12}.$$

o bien el conjunto solución es

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{3\pi+5\sqrt{2}}{12}\right\}$$

$\square$

Observación: Por el momento estamos usando el resultado, que nos entrega la existencia de la raíz cuadrada de un número no negativo, en particular $\sqrt{2}$.

Ejemplo 7 *Determine el valor de $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ de modo que la solución de la ecuación lineal*

$$7\lambda x+3\lambda=4 \tag{1.10}$$

sea igual a $-\frac{3}{5}$.

Solución: Primero determinemos la solución de (1.10), esto es

$$\begin{array}{rrcl} & 7\lambda x+3\lambda & = & 4 \\ \Leftrightarrow & 7\lambda x & = & 4-3\lambda \end{array}$$

como $\lambda \neq 0$ luego, la solución de la ecuación es:

$$x=\frac{4-3\lambda}{7\lambda}$$

Pero ella debe cumplir con:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{4-3\lambda}{7\lambda} & = & -\frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & 20-15\lambda & = & -21\lambda \\ \Leftrightarrow & 6\lambda & = & -20 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\lambda=-\frac{10}{3}.$$

$\square$

Definición 5 *Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right|$$

donde a_{ij}, b_i y $x_j \in \mathbb{R}$, $\quad \forall i=1,2,\ldots,m, \forall j=1,2,\ldots,n.$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, consiste en determinar las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface todas las ecuaciones.

Observación: El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales cumple una de las tres posibilidades siguientes:

1. El conjunto solución tiene sólo un elemento.
2. El conjunto solución tiene infinitos elementos.
3. El conjunto solución es vacío.

Ejemplo 8 *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcr} x-5y & = & -3 \\ 3x-y & = & 8 \end{array}\right|$$

Solución: Si multiplicamos por -5 la segunda ecuación y la sumamos con la primera se obtiene la ecuación

$$-14x = -43$$

de donde $x = \frac{43}{14}$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos $y = \frac{17}{14}$.

Luego el sistema tiene única solución, y esta es

$$x = \frac{43}{14},\ y = \frac{17}{14}$$

o de manera equivalente

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{43}{14}, \frac{17}{14}\right)\right\}.$$

$\square$

Ejemplo 9 *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ x-y+z & = & 0 \end{array}\right|$$

Solución: Multiplicando la segunda ecuación por -1 y sumándola con la primera obtenemos la ecuación

$$2y = 1$$

de donde $y = \frac{1}{2}$.

Luego reemplazando obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcr} x+z & = & \frac{1}{2} \\ x+z & = & \frac{1}{2} \end{array}\right|$$

Como ambas ecuaciones son iguales, se tiene que $x = \frac{1}{2} - z$, donde $z \in \mathbb{R}$ es arbitrario, así el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones y el conjunto solución lo podemos expresar del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ \left(\frac{1}{2} - z,\ \frac{1}{2},\ z \right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (x,\ y,\ z) \mid (\exists t \in \mathbb{R})(x = \frac{1}{2} - t \wedge y = \frac{1}{2} \wedge z = t) \right\} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 10 *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcr} -2x + y + z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \\ x + y - 2z & = & -2 \end{array}\right|$$

Solución: De la primera ecuación obtenemos que

$$y = 2x - z \tag{1.11}$$

reemplazando en el sistema de ecuación se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcr} 0 & = & 0 \\ -3x + 3z & = & 0 \\ 3x - 3z & = & -2 \end{array}\right|$$

La primera ecuación es una tautología, y de la segunda obtenemos $x = z$, reemplazando en la tercer ecuación obtenemos que $0 = -2$, lo cual es claramente una contradicción, en consecuencia el sistema tiene solución vacía. □

1.3.5. Problemas de Planteo

Comenzaremos recordando algunos conceptos que serán de gran utilidad para la resolución de problemas:

1. Se dice que y es el q por ciento de x, si y sólo si
$$y = \frac{q}{100}x.$$

2. La razón entre los números $a : b$ es el cociente
$$\frac{a}{b}.$$
Se llama *proporción* a una igualdad entre dos razones, por ejemplo
$$a : b = c : d$$
la cual se lee a es a b como c es a d.

a) Se dice que a es *directamente proporcional* a b si y sólo si existe una constante k tal que
$$a = kb.$$

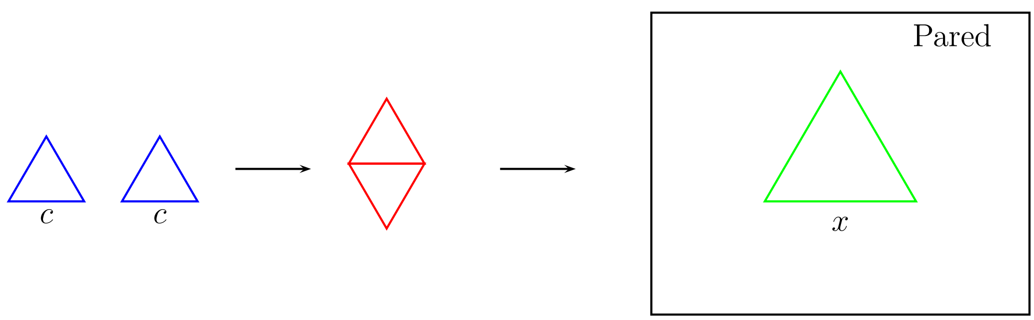
b) Se dice que a es *inversamente proporcional* a b si y sólo si existe una constante k tal que
$$a = k\frac{1}{b}.$$

La constante k (en ambos casos) es llamada factor de proporcionalidad.

3. Sea T un triángulo equilátero de lado a.

$$\begin{array}{lcl} \text{Altura de } T & : & h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \\ \text{Área de } T & : & A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}. \end{array}$$

Ejemplo 11 *Para concluir un trabajo, un albañil corta dos pedazos de cerámica siendo cada uno un triángulo equilátero de base c. Al unir estos pedazos por uno de sus lados, se forma un rombo el cual al ser pegado en la pared no alcanza a cubrir la superficie deseada por el maestro, quedando por rellenar un espacio con una cerámica cuya forma debe ser también un triángulo equilátero, pero de área igual al* 60 % *del rombo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de esta última cerámica para que se tenga el trabajo terminado?.*

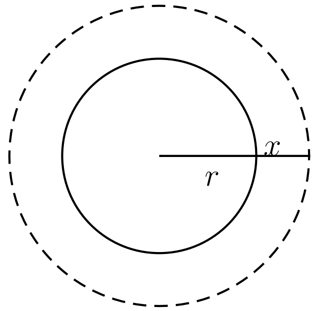


Solución: Sea x la longitud del lado de la cerámica que buscamos.

Se tiene que el área del rombo es dos veces el área de los triángulos equiláteros de lado c, esto es
$$\text{Área del rombo} = 2\left(\frac{c^2\sqrt{3}}{4}\right),$$
pero el area del triángulo de lado x es el 60 % del area del rombo, o sea
$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{60}{100}\frac{c^2\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{6}{5}c^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{6}{5}}\,c.$$

Así la longitud del lado es $x = c\sqrt{\frac{6}{5}}$. □

Ejemplo 12 *En que tanto por ciento debe aumentarse el radio de una circunferencia para que su área aumente en un* $30\,\%$.



Solución: Sean $A = \pi r^2$ el área de la circunferencia de radio r y x la longitud del radio que debemos aumentar para que su área aumente en un $30\,\%$.

Debemos ver que tanto por ciento es x de r.

Tenemos que el área de la circunferencia más el $30\,\%$ de la misma está dada por

$$1,3\pi r^2 = \pi(r+x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1{,}3}r = r + x \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{1,3} - 1\right) r \approx 0{,}14r$$

De aquí tenemos que x es aproximadamente el $14\,\%$ de r, con lo cual concluimos que el radio debe aumentar en un $100(\sqrt{1,3} - 1)\,\%$ para obtener un $30\,\%$ más de área. □

Ejemplo 13 *Dos personas* A *y* B *se encuentran realizando un trabajo. Si* A *realiza el trabajo en* 3 *horas y* B *realiza el trabajo en* 5 *horas. ¿Cuánto tiempo demoraran en hacer el trabajo juntos?.*

Solución: Sean T el trabajo y x el tiempo (en horas) que demorarán en hacer el trabajo los dos obreros.

Como A demora 3 horas en realizar el trabajo, tenemos que en una hora A realiza $\frac{T}{3}$ del trabajo, razonando del mismo modo se tiene que B realiza $\frac{T}{5}$ del trabajo en una hora.

De acuerdo a esto podemos concluir que en una hora ambos realizan $\frac{T}{3} + \frac{T}{5} = \frac{8T}{15}$ del trabajo.

Luego tenemos que el trabajo total esta dado por la siguiente ecuación

$$\frac{8T}{15}x = T \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}$$

simplificando obtenemos que $x = 1{,}875$ horas. Por lo tanto tenemos que los obreros demoran 1,875 horas en realizar el trabajo juntos. □

Ejemplo 14 *Un número entero positivo de dos cifras excede en* 18 *a seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en* 5 *a la de las unidades, ¿cuál es el número?.*

Solución: Sea x la cifra de las unidades e y la cifra de las decenas, en primer lugar tenemos que el número buscado es [4] $N = 10y + x$, ahora bien de acuerdo a la información del problema tenemos que

$$10y + x = 6(x + y) + 18 \text{ y que } y = x + 5.$$

En consecuencia tenemos el siguiente sistema

[4] Si un número N tiene n cifras $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$ ordenados de izquierda a derecha entonces $N = N_{n-1}10^{n-1} + \cdots + N_1 10 + N_0$

$$\left.\begin{array}{rcl} -5x+4y & = & 18 \\ x-y & = & -5 \end{array}\right|$$

multiplicando la segunda ecuación por 4 y sumándola con la primera obtenemos que $x = 2$ y con esto que $y = 7$.

Por lo tanto el número buscado es $N = 7 \cdot 10 + 2 = 72$. □

Ejemplo 15 *Una pareja de estudiantes universitarios debe resolver un determinado problema. Después que el primero de ellos a trabajado durante* 7 *horas en la resolución del problema y el segundo a trabajado durante* 4 *horas en la solución del mismo, juntos han completado* $\frac{5}{9}$ *de la solución total. Si ellos siguieran trabajando juntos durante* 4 *horas más, solo les quedaría por resolver* $\frac{1}{18}$ *del problema. ¿Cuánto tardaría cada uno en resolver completamente el problema?.*

Solución: Sea "s" la solución del problema. Denotemos por "x" la cantidad de horas que tardaría el primer estudiante en resolver el problema y denotemos por "y" la cantidad de horas que tardaría el segundo estudiante en dar solución al problema. Entonces en una hora el primer estudiante realiza $\frac{s}{x}$ de la solución completa mientras que el segundo realiza en el mismo tiempo $\frac{s}{y}$ de la solución completa.

De acuerdo a la información del problema tenemos que

$$7\frac{s}{x} + 4\frac{s}{y} = \frac{5s}{9}.$$

Ahora bien como ellos trabajarán juntos durante 4 horas, realizarán $\frac{4s}{x}+\frac{4s}{y}$ de la solución, que es igual a

$$s - \left(\frac{5s}{9} + \frac{s}{18}\right) = \frac{7s}{18}$$

así se tiene que

$$\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} = \frac{7s}{18}$$

luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{5s}{9} \\ \frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{7s}{18} \end{array}\right|$$

simplificando obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{7}{18} \end{array}\right|$$

resolviendo tenemos que $x = 18$ e $y = 24$. Por lo tanto el primer estudiante tarda 18 horas en dar solución al problema, mientras el segundo tarda 24 horas en realizar la misma tarea. □

1.4. $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado

Adicionalmente el cuerpo de los numeros reales cumple los axiomas de orden

1.4.1. Axiomas de Orden

Existencia de un subconjunto de $\mathbb{R} - \{0\}$, el cual sera denotado por $\mathbb{R}^+$. Los elementos de este subconjunto se llaman números reales positivos y cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 5 *La suma es cerrada, esto es si* $a, b \in \mathbb{R}^+$, *entonces* $a + b \in \mathbb{R}^+$.

Axioma 6 *El producto es cerrado, esto es si* $a, b \in \mathbb{R}^+$, *entonces* $ab \in \mathbb{R}^+$.

Axioma 7 *Ley de Tricotomía.*
Si $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$a \in \mathbb{R}^+ \ \veebar \ a = 0 \ \veebar \ -a \in \mathbb{R}^+.$$

Observación: Los axiomas recién dados nos permiten ordenar totalmente los números reales y aún más graficar este orden en una recta.

Propiedad 5 *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *entonces se verifican:*

1. $a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$, *en particular* $1 \in \mathbb{R}^+$.
2. $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+$.
3. $a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a - c \in \mathbb{R}^+$.
4. $b - a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$.
5. $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^+$.
6. $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac - bc \in \mathbb{R}^+$.

Demostración:

1. Tenemos que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces por axioma (7),

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma (6), $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$, es decir

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Si $-a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma (6), $(-a)(-a) \in \mathbb{R}^+$ pero por proposición (3) parte (7), $(-a)(-a) = (-a)^2 = a^2$, luego $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Así

$$a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

2. Procedamos por absurdo.

Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y supongamos que $a^{-1} \notin \mathbb{R}^+$, entonces por axioma (7)

$$a^{-1} = 0 \quad \veebar \quad -(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+.$$

Supongamos $a^{-1} = 0$ entonces $aa^{-1} = 0$, pero $aa^{-1} = 1$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $a^{-1} \neq 0$.

Supongamos que $-(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+$. Como $a \in \mathbb{R}^+$ tenemos por axioma (6) que $-(a^{-1})a = -1 \in \mathbb{R}^+$, lo cual es una contradicción.

Luego tenemos que

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+.$$

3.
$$\begin{array}{rll} & a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+ & \\ \Rightarrow & (a-b) + (b-c) \in \mathbb{R}^+ & \quad \text{(por axioma (5))} \\ \Rightarrow & a + (-b+b) - c \in \mathbb{R}^+ & \\ \Rightarrow & a + 0 - c \in \mathbb{R}^+ & \\ \Rightarrow & a - c \in \mathbb{R}^+. & \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rl} & b - a \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & b - a + 0 \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & b - a + c - c \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & (b+c) + (-a-c) \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & (b+c) + (a+c) \in \mathbb{R}^+. \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rll} & b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+ & \\ \Rightarrow & (b-a)c \in \mathbb{R}^+ & \quad \text{(por axioma (6))} \\ \Rightarrow & bc - ac \in \mathbb{R}^+. & \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rll} & b-a\in\mathbb{R}^+\wedge -c\in\mathbb{R}^+ & \\ \Rightarrow & (b-a)(-c)\in\mathbb{R}^+ & \text{(por axioma (6))} \\ \Rightarrow & (-bc)-(-ac)\in\mathbb{R}^+ & \\ \Rightarrow & ac-bc\in\mathbb{R}^+. & \end{array}$$

□

Definición 6 *Se define el conjunto de los números reales negativos como*

$$\mathbb{R}^- = \{a\in\mathbb{R} \mid -a\in\mathbb{R}^+\}.$$

Observación: Notemos que por el axioma 7 podemos descomponer $\mathbb{R}$ en la unión disjunta de $\mathbb{R}^+, \{0\}$ y $\mathbb{R}^-$, esto es

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \,\dot{\cup}\, \{0\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{R}^-.$$

Definición 7 *Sean $a, b\in\mathbb{R}$. Se dice que a es* mayor *que b ó b es menor que a si y sólo si*

$$a-b\in\mathbb{R}^+ \tag{1.12}$$

este hecho se anota como

$$a>b \quad \text{o bien} \quad b<a.$$

Diremos que a es mayor o igual *que b o bien b es menor o igual que a si y sólo si a es mayor que b o a es igual a b, es decir*

$$a>b \quad \text{o} \quad a=b,$$

de modo abreviado anotaremos este hecho como sigue

$$a\geq b \quad \text{o bien} \quad b\leq a.$$

Observación: De acuerdo a las notaciones precedentes, tenemos:

1. $a\in\mathbb{R}^+$ si y sólo si $a>0$.
2. $a\in\mathbb{R}^-$ si y sólo si $a<0$.

Corolario 6 *Sean $a, b, c\in\mathbb{R}$*

1. $a\in\mathbb{R}-\{0\}\Rightarrow a^2>0$.
2. $a>0\Rightarrow a^{-1}>0$.
3. $a>b\wedge b>c\Rightarrow a>c$.
4. $b>a\Leftrightarrow b+c>a+c$.
5. $b>a\wedge c>0\Rightarrow bc>ac$.
6. $b>a\wedge c<0\Rightarrow bc<ac$.

Notación:

$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq c.$$

Teorema 7 (Tricotomía) *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones*

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Demostración: Directa del axioma 7 y la notación en (1.12), considerando el número real $a - b$. □

Observación: La relación $a \leq b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ es una **relación de orden total.** Pues se verifican que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Reflexividad
$$a \leq a.$$
2. Antisimetría
$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b.$$
3. Transitividad
$$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c.$$
4. Tricotomía
$$a < b \ \veebar \ a = b \ \veebar \ b < a.$$

Propiedad 8 *Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} p < q &\Rightarrow p + p < p + q \quad \text{(por corolario (6) parte 4)} \\ &\Rightarrow 2p < p + q \\ &\Rightarrow p < \frac{p+q}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} p < q &\Rightarrow p + q < q + q \quad \text{(por corolario (6) parte 4)} \\ &\Rightarrow p + q < 2q \\ &\Rightarrow \frac{p+q}{2} < q. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que existe $r = \dfrac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$. □

1.4.2. Raíz n-ésima

La existencia de la raíz n-ésima, se demuestra usando el axioma del supremo, que aún no hemos presentado.

Propiedad 9 *Dado a un número real positivo y un número natural n, existe un único b real positivo tal que*

$$a = b^n$$

en símbolos

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! b \in \mathbb{R}^+)(b^n = a). \tag{1.13}$$

Definición 8 *El número b en (1.13) se llama* **raíz n-ésima** *de a y se denota por*

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \vee \quad b = a^{\frac{1}{n}}.$$

Más aún, si $m \in \mathbb{Z}$ se define

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \text{ con } a > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

ahora bien si n resulta ser un número impar, podemos extender esta definición a bases negativas, esto es

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \quad a > 0.$$

Observación: Si $a \geq 0$ podemos asegurar que

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Propiedad 10 *Si $a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces*

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

Este hecho nos dice que las propiedades de potencia dadas en el Teorema (4) se preservan para exponentes racionales.

Propiedad 11 *Si n es un número natural par y $a < 0$, entonces no existe un número real b tal que*

$$a = b^n.$$

Demostración: Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$a = b^n,$$

como n es par se tiene que $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ luego

$$a = b^{2k} = (b^k)^2.$$

Ahora si $b = 0$ entonces $a = 0$ y si $b \neq 0$, entonces $(b^k)^2 > 0$, es decir $a > 0$. Lo cual en ambos casos es una contradicción pues $a < 0$. $\square$

Propiedad 12 *Si n es un número natural impar y $a < 0$, entonces existe un único número real b tal que*

$$a = b^n.$$

Demostración: Como $a < 0$, luego $-a > 0$, por la propiedad 1.13, se tiene que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$-a = b^n,$$

como n es impar se tiene que $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ luego

$$a = -(b^n) = -(b^{2k})b = ((-b)^2)^k(-b) = (-b)^n.$$

El cual debe ser único por la propiedad 1.13. □

Ejemplo 16 $\sqrt{2}$ *es irracional.*

Solución: En efecto procedamos por absurdo, es decir supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, esto es

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, de modo tal, que la fracción $\frac{p}{q}$ esta simplificada al máximo, ahora bien

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = \sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow\ p^2 &= 2q^2 \end{aligned}$$

luego tenemos que p^2 es un número par, entonces por (1.1) p es par, es decir $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, luego tenemos que

$$p^2 = 4k^2$$

pero $p^2 = 2q^2$, por lo tanto $2q^2 = 4k^2$ de aquí que $q^2 = 2k^2$, lo cual nos dice que q^2 es un número par y nuevamente por (1.1) tenemos que q es par.

Hemos concluido entonces que p y q son pares lo que contradice el supuesto que la fracción $\frac{p}{q}$ estaba simplificada al máximo, de este modo obtenemos por absurdo que $\sqrt{2}$ es un número irracional. □

Ejemplo 17 *Simplificar completamente, para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ donde estén bien definidas las siguientes expresiones:*

1.
$$X = \left(\frac{a^{-3}b}{a^2b^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^2b}\right)^{-3}.$$

2.
$$X = \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}}.$$

Solución:

1.-

$$\begin{aligned}
X &= \left(\frac{a^{-3}b}{a^2b^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^2b}\right)^{-3} \\
&= \left(\frac{\frac{b}{a^3}}{\frac{a^2}{b^4}}\right)^{-2} : \left(\frac{\frac{1}{a^2b}}{a^2b}\right)^{-3} \\
&= \left(\frac{b^5}{a^5}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{(a^2b)^2}\right)^{-3} \\
&= \left(\frac{a^5}{b^5}\right)^{2} : (a^2b)^6 \\
&= \frac{a^{10}}{b^{10}} : a^{12}b^6 = \frac{a^{10}}{a^{12}b^{16}} = \frac{1}{a^2b^{16}}.
\end{aligned}$$

De este modo se tiene que

$$X = \frac{1}{a^2b^{16}}.$$

2.-

$$\begin{aligned}
X &= \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{(a-b)^3}}{\sqrt{a+b}} - \frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{\sqrt{(a+b)^4} + \sqrt{(a-b)^4} - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2 - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} = 0
\end{aligned}$$

En este caso se tiene $X = 0$.

Observación: Racionalizar una fracción, consiste en obtener un expresión equivalente, en la cual el denominador correspondiente, no incluye expresiones con raíces. Para lograr este cometido se recurre a los Productos Notables.

Ejemplo 18 *Racionalizar las siguiente fracciones*

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

Solución: *Para resolver este problema tenga presente*

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2-1}}=\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}\\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2}}\\ &= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4\cdot 2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

6. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

Solución: *Para resolver este problema tenga presente*

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}^3+1^3}=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2(2+\sqrt{6})}\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}\\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{6})}{2(4-6)}\\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}-2)}{4}
\end{aligned}$$

8. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})(2-\sqrt{2})}{2}
\end{aligned}$$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$

Solución: *Para resolver este problema tenga presente*

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}\\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{8-4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 19 *Para los valores de* $a=\sqrt{3}$, $b=(-2)^{-1}$, $c=\frac{2}{-3}$. *Determine en forma exacta y racionalizada el valor de*

$$A=\frac{1+\frac{a}{bc}}{\frac{1}{b}-\frac{a}{c}}$$

Solución: Simplifiquemos antes de reemplazar la expresión que la define

$$A = \frac{1 + \frac{a}{bc}}{\frac{1}{b} - \frac{a}{c}} = \frac{\frac{bc+a}{bc}}{\frac{c-ba}{bc}} = \frac{bc+a}{c-ba}$$

Ahora reemplacemos los valores conocidos

$$A = \frac{(-2)^{-1} \cdot \frac{2}{-3} + \sqrt{3}}{\frac{2}{-3} - (-2)^{-1} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{-2\cdot -3} + \sqrt{3}}{\frac{2}{-3} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{3} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}} = \frac{2 + 6\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 4}$$

Finalmente racionalizamos

$$A = \frac{2 + 6\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 4} \cdot \frac{3\sqrt{3} + 4}{3\sqrt{3} + 4} = \frac{(2 + 6\sqrt{3})(3\sqrt{3} + 4)}{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} = \frac{62 + 30\sqrt{3}}{11}$$

□

1.4.3. Ecuación de Segundo Grado

Definición 9 *Se llama ecuación de segundo grado en la variable x a una expresión del tipo*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad con \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{1.14}$$

Determinemos ahora las posibles soluciones de la ecuación (1.14).

$$\begin{array}{rrcl} & ax^2 + bx + c & = & 0 \quad /4a \\ \Leftrightarrow & 4a^2x^2 + 4abax + 4ac & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax + b)^2 & = & b^2 - 4ac \end{array}$$

Notemos que estas ecuación tiene solución o raíces en $\mathbb{R}$ si y sólo si

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

y en este caso podemos calcular

$$\begin{array}{rrcl} & 2ax + b & = & \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\ \Leftrightarrow & 2ax & = & -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ \Leftrightarrow & x & = & \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{array}$$

Además note que, en el caso que el discriminante es no negativo, podemos factorizar el polinomio del siguiente modo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \tag{1.15}$$

Definición 10 *El discriminante de la ecuación de segundo grado (1.14) o del polinomio $ax^2 + bx + c$ corresponde a la expresión*

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

Teorema 13 *Considerando la ecuación (1.14) o el polinomio $ax^2 + bx + c$, tenemos que:*

1. *Si $\triangle > 0$, entonces la ecuación (1.14) tiene dos soluciones o raíces distintas en $\mathbb{R}$*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

2. *Si $\triangle = 0$, entonces la ecuación (1.14) tiene dos soluciones raíces iguales en $\mathbb{R}$*

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3. *Si $\triangle < 0$, entonces la ecuación (1.14) no tiene soluciones o raíces en $\mathbb{R}$.*

Observación: Si denotamos $\mathcal{S}$ al conjunto solución de la ecuación (1.14), tenemos que

1. Si $\triangle > 0$, $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$.
2. Si $\triangle = 0$, $\mathcal{S} = \{x_1\}$.
3. Si $\triangle < 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Ejemplo 20 *Determinar las raíces y factoricé el polinomio*

$$5x^2 + 7x - 3.$$

Solución: Como $\triangle = (7)^2 + 60 = 109 > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales y distintas, a saber:

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{109}}{10}, \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{109}}{10}.$$

La factorización esta dada en (1.15)

$$5x^2 + 7x - 3 = 5\left(x - \frac{-7 + \sqrt{109}}{10}\right)\left(x - \frac{-7 - \sqrt{109}}{10}\right)$$

$\square$

Ejemplo 21 *Determinar las raíces y factoricé el polinomio*

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3.$$

Solución: En este caso $\triangle = (2\sqrt{3})^2 - 12 = 0$, luego la ecuación tiene una raíz real (dos raíces iguales)

$$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}.$$

La factorización se obtiene por (1.15)

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = (x + \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = (x + \sqrt{3})^2$$

□

Ejemplo 22 *Determinar, si existen las raíces de la ecuación*

$$x^2 + x + 1.$$

Solución: Como $\triangle = -3 < 0$, tenemos que la ecuación no tiene raíces reales y por lo tanto no se puede factorizar en producto de factores lineales. □

Ejemplo 23 *Resolver la ecuación*

$$\sqrt{x} + x = 12.$$

Solución: La restricción del problema es $\mathbb{R}_0^+$ y usemos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ es decir $u^2 = x$.

Reemplazando tenemos que

$$u^2 + u - 12 = 0,$$

y su discriminate es $\triangle = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 > 0$, luego tenemos que

$$u = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

es decir

$$u = 3 \ \vee \ u = -4$$

pero volviendo a la variable original, tenemos una sola posibilidad

$$\sqrt{x} = 3$$

y por lo tanto $S = \{9\}$. □

Ejemplo 24 *Resolver la ecuación*

$$x^2 - x = \frac{9}{x^2 - x}.$$

Solución: La restricción del problema es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, luego

$$\begin{aligned} (x^2 - x)^2 &= 9 \\ x^2 - x &= \pm\sqrt{9} \\ x^2 - x \mp 3 &= 0 \end{aligned}$$

Para la primera ecuación $x^2 - x - 3 = 0$, se tiene $\triangle = 13 > 0$. luego la solución es

$$S_1 = \left\{ \frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Para la segunda ecuación $x^2 - x + 3 = 0$, tenemos $\triangle = -11 < 0$. luego la solución es vacía

$$S_2 = \phi.$$

Con lo cual se obtiene que

$$S = S_1 \cup S_2 = S_1 \cup \phi = \left\{ \frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

$\square$

Sistemas de Ecuaciones no Lineales.

Una herramienta de gran utilidad para la resolución de sistemas no lineales, es el item 8 de la propiedad 3, de otras manera, la necesidad de factorizar la expresión polinomial o algebraica no olvidado que debe estar igualada a cero.

Ejemplo 25 *Resolver*

$$\begin{array}{rcr|} (x-y)^2 & = & 9 \\ x+y & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

Solución: De la primera ecuación tenemos los casos

$$x - y = 3 \quad \vee \quad x - y = -3.$$

1. Si $x - y = 3$ tenemos que

$$\begin{array}{rcr|} x-y & = & 3 \\ x+y & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

   de donde $x = \frac{5}{2}$ y $y = -\frac{1}{2}$.

2. Si $x - y = -3$ tenemos que

$$\begin{array}{rcr|} x-y & = & -3 \\ x+y & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

   de donde $x = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{5}{2}$.

Por lo tanto existen dos soluciones para el sistema, estas son

$$(x,y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

$\square$

Ejemplo 26 *Resolver*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-1 & = & 2zx \\ 4y & = & 2zy \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right|$$

Solución: De la segunda ecuación tenemos que

$$2y(z-2)=0$$

de donde

$$y=0 \quad \vee \quad z=2.$$

1. Supongamos $y=0$, reemplazando en la tercera ecuación tenemos que

   $$x^2=1$$

   de donde

   $$x=1 \quad \vee \quad x=-1.$$

   luego, si $x=1$, entonces $z=\frac{1}{2}$ y si $x=-1$, entonces $z=\frac{3}{2}$. Así tenemos dos soluciones

   $$(x,y,z)=\left(1,0,\frac{1}{2}\right), \quad (x,y,z)=\left(-1,0,\frac{3}{2}\right).$$

2. Supongamos ahora $z=2$, reemplazando en la primera ecuación tenemos que $x=-\frac{1}{2}$. Luego reemplazando en la tercera ecuación se tiene que

   $$y^2-\frac{3}{4}=0,$$

   de donde

   $$y=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Tenemos entonces dos soluciones más

   $$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right), \quad (x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right).$$

Por lo tanto existen cuatro soluciones para el sistema, estas son:

$$(x,y,z)=\left(1,0,\frac{1}{2}\right), \quad (x,y,z)=\left(-1,0,\frac{3}{2}\right)$$

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right), \quad (x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right).$$

□

Ejemplo 27 *Resolver*

$$\left.\begin{array}{rcl} y+2z+wyz &=& 0\\ x+2z+wxz &=& 0\\ 2x+2y+wxy &=& 0\\ xyz &=& \sqrt{5} \end{array}\right|$$

Solución: Restando la segunda ecuación a la primera se tiene que

$$y-x+wz(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(1+wz)=0$$

de donde

$$y=x \quad \vee \quad \left(w=-\frac{1}{z}, \text{con } z\neq 0\right). \tag{1.16}$$

1. Supongamos $w=-\frac{1}{z}$, reemplazando en la primera ecuación tenemos que

$$2z=0$$

con lo cual $z=0$, esto es una contradicción pues $z\neq 0$, así el caso $1+wz=0$ no se puede dar.

2. Supongamos entonces $x=y$, reemplazando en la tercera ecuación obtenemos

$$x(4+wx)=0$$

de donde

$$x=0 \quad \vee \quad w=-\frac{4}{x}, \text{pues } x\neq 0$$

ahora si $x=0$, lo reemplazamos en la cuarta ecuación obtenemos que $0=\sqrt{5}$. Lo que claramente es una contradicción.

Ahora si $w=-\frac{4}{x}$, lo reemplazamos en la segunda ecuación tenemos que

$$x=2z.$$

Finalmente sustituyendo $x=y$ y $x=2z$ en la cuarta ecuación obtenemos que

$$\frac{x^3}{2}=\sqrt{5}$$

de donde $x=\sqrt[3]{2\sqrt{5}}=y$, $z=\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{2}$ y $w=-\dfrac{4}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}$

Así la solución al sistema es

$$(x,y,z,w)=\left(\sqrt[3]{2\sqrt{5}}, \sqrt[3]{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{2}, -\frac{4}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}\right).$$

$\square$

Propiedad 14 *Sean $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ entonces tenemos que*

1. *Si n es impar entonces*
$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

2. *Si n es par y $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ entonces*
$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

Observación: Tenga presente las hipótesis de las propiedades, no hacerlo le puede significar mas de un problema o error, por ejemplo:

$$\sqrt{x} = -1 \leftrightarrow \sqrt{x}^2 = (-1)^2 \leftrightarrow x = 1$$

La primera ecuación tiene como conjunto solución a ϕ y la última ecuación tiene como conjunto solución a $\{1\}$. Por lo tanto cuidado con la hipótesis.

Ejemplo 28 *Resolver*
$$\sqrt{3x+1} = 2$$

Solución: La ecuación tiene restricción dada por:

$$3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

Como $\sqrt{3x+1} \geq 0$ y $2 \geq 0$, luego podemos aplicar la propiedad

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3x+1} & = & 2 \quad /(\ )^2 \\ 3x+1 & = & 4 \\ x & = & 1 \end{array}$$

□

Ejemplo 29 *Resolver*
$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$$

Solución: La ecuación tiene restricciones dadas por:

$$(2x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \geq 3)$$

Para aplicar la propiedad despejamos

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$$

Como $\sqrt{2x+1} \geq 0$ y $2 + \sqrt{x-3} \geq 0$, luego lo hacemos

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2x+1} & = & 2 + \sqrt{x-3} \quad /(\ )^2 \\ 2x+1 & = & 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3 \\ x & = & 4\sqrt{x-3} \end{array}$$

Por restricción tenemos que $x \geq 3 > 0$, luego volvemos aplicar la propiedad

$$\begin{array}{rcl} x & = & 4\sqrt{x-3} \quad /(\ )^2 \\ x^2 & = & 16(x-3) \\ x^2 - 16x + 48 & = & 0. \end{array}$$

Calculando el discriminante $\triangle = 64 > 0$, luego las soluciones están dada por

$$x = \frac{16 \pm 8}{2}$$

Con lo cual

$$x = 12 \quad \text{o} \quad x = 4$$

Considerando la restricción obtenemos

$$S = \{4, 12\}$$

□

Ejemplo 30 *Resolver*

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 4$$

Solución: La ecuación tiene restricciones dadas por:

$$(x + 1 \geq 0 \wedge x - 7 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x \geq 7)$$

es decir, la restricción es $x \geq 7$.

Como $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} \geq 0$ y $4 \geq 0$, luego podemos elevar al cuadrado

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} & = & 4 \quad /(\ )^2 \\ x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-7)} + x - 7 & = & 16 \\ 22 - 2x & = & 2\sqrt{(x+1)(x-7)} \\ 11 - x & = & \sqrt{(x+1)(x-7)} \end{array}$$

Además $\sqrt{(x+1)(x-7)} \geq 0$, luego tenemos $11 - x \geq 0$. Con lo cual tenemos que $x \leq 11$, así podemos elevar al cuadrado

$$\begin{array}{rcl} 11 - x & = & \sqrt{(x+1)(x-7)} \quad /(\ )^2 \\ 121 - 22x + x^2 & = & x^2 - 6x - 7 \\ 16x & = & 128 \\ x & = & 8 \end{array}$$

Considerando la restricción obtenemos

$$S = \{8\}$$

□

Ejemplo 31 *Resolver*

$$\sqrt{x+1}+x=6$$

Solución: La ecuación tiene como restricción a

$$x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$$

Como $\sqrt{x+1}\geq 0$, luego $6-x\geq 0$, es decir $6\geq x$, elevando al cuadrado tenemos

$$\begin{array}{rcl}\sqrt{x+1} & = & 6-x/()^2\\ x+1 & = & 36-12x+x^2\\ x^2-13x+35 & = & 0\end{array}$$

Su discriminante es $169-140=29>0$, luego tenemos

$$x=\frac{13\pm\sqrt{29}}{2}$$

Note que un de los valores es mayor que 6, luego

$$S=\left\{\frac{13-\sqrt{29}}{2}\right\}$$

□

1.4.4. Valor Absoluto

Definición 11 *Sea $x\in\mathbb{R}$, se define el valor absoluto de x como*

$$|x|=\left\{\begin{array}{rcl} x & si & x\geq 0\\ -x & si & x<0\end{array}\right.$$

Observación: Note que se cumple $\sqrt{a^2}=|a|, \quad \forall a\in\mathbb{R}$.

Ejemplo 32 *Determinar los siguientes valores*

1. $|-3|=3$
2. $|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$
3. $|3-|\sqrt{3}-2||=|3-(2-\sqrt{3})|=|1+\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}$
4. $|\sqrt{5}-|2-\sqrt{5}||=2$

Propiedad 15 *Sean $a,b\in\mathbb{R}$ entonces:*

1. $|a|\geq 0$.
2. $|a|=|-a|$.

3. $|ab| = |a||b|$.

4. $|a|^2 = |a^2| = a^2$.

5. $-|a| \leq a \leq |a|$.

6. $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

7. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Propiedad 16 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}_0^+$ *entonces:*

1. $|a| = c \Leftrightarrow (a = c \vee a = -c)$.

2. $|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$.

Ejemplo 33 *Resolver las siguientes ecuaciones*

1. $|x| = 3$

   Solución: De la proposición 16 parte 1 tenemos que

   $$x = 3 \ \vee \ x = -3$$

   Luego el conjunto solución es:

   $$S = \{3, -3\}$$

2. $|x - 3| = \sqrt{3} - 1$

   Solución: Como $\sqrt{3} - 1 > 0$, de la proposición 16 parte 1 tenemos que

   $$\begin{aligned} x - 3 = \sqrt{3} - 1 \quad &\vee \quad x - 3 = -(\sqrt{3} - 1) \\ x = \sqrt{3} + 2 \quad &\vee \quad x = -\sqrt{3} + 4 \end{aligned}$$

   Luego el conjunto solución es:

   $$S = \{\sqrt{3} + 2, -\sqrt{3} + 4\}$$

3. $|2x - 7| = \sqrt{5} - 3$

   Solución: Como $\sqrt{5} - 3 < 0$, luego por propiedad 15, tenemos que el conjunto solución es:

   $$S = \phi$$

4. $|3 - x| = 3x - 1$

   Solución: Como $|3 - x| \geq 0$, luego tenemos que $3x + 1 \geq 0$ y por lo tanto $x \geq -\frac{1}{3}$, ahora de la proposición 16 parte 1 tenemos que

   $$\begin{aligned} 3 - x = 3x - 1 \quad &\vee \quad 3 - x = -(3x - 1) \\ -4x = -4 \quad &\vee \quad 2x = -2 \\ x = 1 \quad &\vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

   Note que uno de los valores no cumple la restricción, luego el conjunto solución es:

   $$S = \{1\}$$

5. $||x-1|-3|=5$

   Solución: De la proposición 16 parte 1 tenemos que

$$\begin{aligned} |x-1|-3=5 \quad &\vee \quad |x-1|-3=-5 \\ |x-1|=8 \quad &\vee \quad |x-1|=-2 \end{aligned}$$

   Como $0 \leq |x-1| = -2 < 0$ es una contradicción, luego continuamos con la otra igualdad

$$\begin{array}{ccc} & |x-1|=8 & \\ x-1=8 & \vee & x-1=-8 \\ x=9 & \vee & x=-7 \end{array}$$

   Luego el conjunto solución es:

$$S=\{-7,9\}$$

6. $||x-1|-3x|=2$

   Solución: Podemos aplicar la propiedad 16 y tenemos que

$$\begin{aligned} |x-1|-3x=2 \quad &\vee \quad |x-1|-3x=-2 \\ |x-1|=2+3x \quad &\vee \quad |x-1|=-2+3x \end{aligned}$$

   Lo resolveremos por caso

   Primer Caso $|x-1|=2+3x$

   Como $0 \leq |x-1| = 2+3x$, luego tenemos que $x \geq -\frac{2}{3}$ y ahora aplicamos la propiedad

$$\begin{aligned} x-1=2+3x \quad &\vee \quad x-1=-(2+3x) \\ -2x=3 \quad &\vee \quad 4x=-1 \\ x=-\frac{3}{2} \quad &\vee \quad x=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Luego tenemos,

$$S_1=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

   Segundo Caso $|x-1|=-2+3x$

   Como $0 \leq |x-1| = -2+3x$, luego tenemos que $x \geq \frac{2}{3}$ y ahora aplicamos la propiedad

$$\begin{aligned} x-1=-2+3x \quad &\vee \quad x-1=-(-2+3x) \\ -2x=-1 \quad &\vee \quad 4x=3 \\ x=\frac{1}{2} \quad &\vee \quad x=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

   Luego tenemos

$$S_2=\left\{\frac{3}{4}\right\}$$

Así el conjunto solución es:

$$S = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$$

7. $|2x - 7| - |x| = 2$

Solución: Despejando tenemos

$$|2x - 7| = |x| + 2$$

Ahora podemos aplicar la propiedad 16 y tenemos que

$$\begin{aligned} 2x - 7 = |x| + 2 &\quad \vee \quad 2x - 1 = -(|x| + 2) \\ |x| = 2x - 9 &\quad \vee \quad |x| = -1 - 2x \end{aligned}$$

Lo resolveremos por caso

Primer Caso $|x| = 2x - 9$

Como $0 \leq |x| = 2x - 9$, luego tenemos que $x \geq \frac{9}{2}$ y ahora usamos la propiedad

$$\begin{aligned} x = 2x - 9 &\quad \vee \quad x = -(2x - 9) \\ x = 9 &\quad \vee \quad 3x = 9 \\ x = 9 &\quad \vee \quad x = 3 \end{aligned}$$

Luego tenemos,

$$S_1 = \{9\}$$

Segundo Caso $|x| = -1 - 2x$

Como $0 \leq |x - 1| = -1 - 2x$, luego tenemos que $x \geq -\frac{1}{2}$ y ahora usamos la propiedad

$$\begin{aligned} x = -1 - 2x &\quad \vee \quad x = -(-1 - 2x) \\ 3x = -1 &\quad \vee \quad -x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} &\quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$S_2 = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

Así el conjunto solución es:

$$S = \left\{ -\frac{1}{3},\ 9 \right\}$$

$\square$

1.4.5. Inecuaciones

En la secciones anteriores, hemos resuelto problemas donde figura el símbolo de igualdad en la función proposición, lo que hemos llamado ecuación. Ahora emprenderemos el desafió de resolver problemas donde aparece el símbolo de desigualdad, llamadas inecuaciones.

Para ello, a continuación formalizamos algunos conceptos que ya hemos utilizados anteriormente.

1. **Conjunto Restricción**

   Llamaremos conjunto restricción de una expresión que involucra términos $P(x)$ y $Q(x)$ al conjunto $\mathcal{R}$ de los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada término de la expresión esta definido en $\mathbb{R}$. Los términos $P(x)$ y $Q(x)$ son tales que al menos uno de ellos involucra la variable x.

2. **Conjunto Solución**

   Llamaremos conjunto solución de la ecuación $P(x) = Q(x)$ o de la inecuación $P(x) \leq Q(x)$ al subconjunto $\mathcal{S}$ de los x en $\mathcal{R}$ que satisfacen la ecuación o inecuación, es decir

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) = Q(x)\} \quad \vee \quad \mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) \leq Q(x)\}.$$

Intervalos en $\mathbb{R}$: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$ se denotan

$$\begin{array}{rcl} [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}; & &]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}; \\ ]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; & &]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}; \\ ]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; & &]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}; \\ [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}; & & [a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}. \end{array}$$

Ejemplo 34 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$3x + 5 \leq 10.$$

En este caso $\mathcal{R}$ es todo $\mathbb{R}$, ahora bien

$$\begin{array}{rrcl} & 3x + 5 & \leq & 10 \\ \Leftrightarrow & 3x & \leq & 5 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & \frac{5}{3}. \end{array}$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq \frac{5}{3} \right\} = \left] -\infty, \frac{5}{3} \right].$$

□

Propiedad 17 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$*

1. $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.

2. $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$.

Demostración: Demostraremos sólo (1), ya que, la demostración de (2) es análoga y se dejará como ejercicio.
($\Rightarrow$)
Primer caso. Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$, luego por axioma (6) y asociatividad se tiene que $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^+$ y en consecuencia

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+$$

por lo tanto

$$ab > 0 \Rightarrow a > 0 \wedge b > 0.$$

Segundo caso. Si $a \in \mathbb{R}^-$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^-$, luego por axioma (6) y asociatividad se tiene que $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^-$ y en consecuencia

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^-$$

por lo tanto

$$ab > 0 \Rightarrow a < 0 \wedge b < 0$$

tenemos entonces que $ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.
($\Leftarrow$) Claramente por el axioma (6)

$$(a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$$

y

$$(a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^-) \Rightarrow ab = (-a)(-b) \in \mathbb{R}^+.$$

En consecuencia

$$[(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)] \Rightarrow ab > 0.$$

□

Corolario 18 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$*

1. $ab \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$.
2. $ab \leq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \geq 0)$.

Ejemplo 35 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 0.$$

Solución: El conjunto restricción de la inecuación es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-5\}$, ahora bien notando que a y a^{-1} ambos son negativos o positivos, de otro modo el signo de a y a^{-1} es el mismo, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x+5} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x - 3 \geq 0 \wedge (x+5)^{-1} > 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge (x+5)^{-1} < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x - 3 \geq 0 \wedge x + 5 > 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x + 5 < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 3 \wedge x > -5) \vee (x \leq 3 \wedge x < -5) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 3) \vee (x < -5).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{R} \;\middle|\; \frac{x-3}{x+5} \geq 0 \right\} =]-\infty, -5[\cup[3, \infty[.$$

$\square$

Observación: La resolución de la inecuación $\frac{x-3}{x+5} \geq 0$, se puede resumir en la siguiente tabla

	$]-\infty,-5[$	-5	$]-5,3[$	3	$]3,\infty[$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-3}{x+5}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Donde el signo $+$ y $-$ indican que el factor es positivo o negativo en el intervalo analizado, y la última fila se anota el signo del cuociente.

Ahora observando la última fila de la tabla tenemos que, la solución a la inecuación

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 0$$

es $\mathcal{S} =]-\infty, -5[\cup[3, \infty[$.

Observación: Recuerde que una expresión del tipo $ax+b$, con $a \neq 0$ en un punto es cero, y en los intervalos complementarios es positivo o negativo

$$\begin{array}{lcl} ax+b > 0 & \Leftrightarrow & x > -\dfrac{b}{a} \quad \veebar \quad x < -\dfrac{b}{a} \\ ax+b < 0 & \Leftrightarrow & x > -\dfrac{b}{a} \quad \veebar \quad x < -\dfrac{b}{a} \end{array}$$

Ejemplo 36 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0.$$

Solución: La restricción de la inecuación es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 49 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-7, 7\}$, ahora bien

$$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(4-2x)(x+3)}{(x+7)(x-7)} \leq 0.$$

Consideremos la tabla formada por todos los factores involucrados

	$]-\infty,-7[$	-7	$]-7,-3[$	-3	$]-3,2[$	2	$]2,7[$	7	$]7,\infty[$
$4-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Observando la tabla tenemos que $\dfrac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0$ en $]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[$, luego

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[) =]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[.$$

□

Propiedad 19 *Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$*

1. $(a < b \wedge c < d) \Rightarrow ac < bd$.
2. $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.

Demostración:

1. Inmediato del corolario (6) parte 5.
2. $(\Rightarrow)$ De (1) es claro que
$$(a < b \wedge a < b) \Rightarrow a^2 < b^2.$$
Continuando con este proceso, se prueba inductivamente, ya que
$$(a < b \wedge a^n < b^n) \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}.$$
$(\Leftarrow)$ Sea
$$L = (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
entonces se tiene que
$$a^n - b^n = (a-b)L.$$
Ahora bien como $a,b \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $L \in \mathbb{R}^+$ y así por corolario (6) parte 2 $L^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Por hipótesis tenemos que $a^n < b^n \Leftrightarrow a^n - b^n < 0$, es decir
$$(a-b)L < 0$$
pero $L^{-1} > 0$, luego $(a-b)LL^{-1} < 0$, de donde
$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$
concluyendo así la demostración.

□

Corolario 20 *Para todo $a,b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$*

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Demostración: Como a y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a = (\sqrt[n]{a})^n$ y $b = (\sqrt[n]{b})^n$, luego de acuerdo a la proposición anterior tenemos que

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n \Leftrightarrow a < b.$$

□

Ejemplo 37 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$x-5 \;\leq\; \sqrt{x^2-2}. \tag{1.17}$$

Solución: La restricción de la inecuación es

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{x\in\mathbb{R} \mid x^2-2\geq 0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} \mid (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\geq 0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} \mid x\geq\sqrt{2}\vee x\leq-\sqrt{2}\}\\
&= \,]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty[.
\end{aligned}$$

Ahora debemos analizar los casos $x-5\geq 0 \wedge x-5<0$, esto es

1. Supongamos $x-5\leq 0$ y $x\in\mathcal{R}$, es decir

$$x\in\mathcal{R}_1=\mathcal{R}\cap]-\infty,5]=]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},5]$$

como $x-5\leq 0$ y $0\leq\sqrt{x^2-2}$, para $x\in\mathcal{R}_1$ la desigualdad $x-5\leq\sqrt{x^2-2}$ se satisface. Luego la solución en este caso está dada por

$$\mathcal{S}_1=]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},5].$$

2. Supongamos ahora $x-5\geq 0$ y $x\in\mathcal{R}$, es decir

$$x\in\mathcal{R}_2=\mathcal{R}\cap[5,\infty[=[5,\infty[$$

ahora bien como $x-5\geq 0$ y $\sqrt{x^2-2}\geq 0$ para $x\in\mathcal{R}_2$, podemos elevar al cuadrado la desigualdad (1.17), así

$$\begin{aligned}
x-5 &\leq \sqrt{x^2-2}\\
\Leftrightarrow\quad x^2-10x+25 &\leq x^2-2\\
\Leftrightarrow\quad x &\geq \frac{27}{10}
\end{aligned}$$

luego la solución en este caso está dada por

$$\mathcal{S}_2=\mathcal{R}_2\cap\left[\frac{27}{10},\infty\right[=[5,\infty[.$$

Tenemos entonces que la solución de la inecuación (1.17) es

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2=]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty[.$$

$\square$

Ejemplo 38 *Resolver la inecuación*

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{2x+1}\leq 1$$

Solución: La restricciones son $x-3 \geq 0 \ \wedge \ 2x+1 \geq 0$, es decir, $x \geq 3 \ \wedge \ x \geq -\frac{1}{2}$, luego el conjunto restricción de la inecuación es

$$\mathcal{R} = [3, \infty[.$$

Para poder elevar al cuadrado, debemos tener seguridad que los términos son no negativos

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} & \leq & 1 \\ \sqrt{x-3} & \leq & 1 + \sqrt{2x+1} \quad ()^2 \\ x-3 & \leq & 1 + 2\sqrt{2x+1} + 2x + 1 \\ -x-5 & \leq & 2\sqrt{2x+1} \end{array}$$

Considerando la restricción tenemos que

$$x \geq 3 \Leftrightarrow -x-5 \leq -8$$

Por lo cual obtenemos que,

$$\underbrace{-x-5}_{-} \leq \underbrace{\sqrt{2x+1}}_{+}$$

de este modo la desigualdad se cumple siempre.

Así el conjunto solución es

$$S = [3, \infty[.$$

□

Propiedad 21 *Dado el polinomio $ax^2 + bx + c$, tenemos que:*

1. *Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ y $a > 0$, entonces*

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ y $a < 0$, entonces*

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Dada la polinomio de segundo grado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (4a)(ax^2+bx+c) & = & 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \\ & = & (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac \\ & = & (2ax+b)^2 + 4ac - b^2 \end{array}$$

De este modo tenemos

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax+b)^2 + 4ac - b^2}{4a}$$

Supongamos ahora que $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces se tiene que las expresiones $(2ax+b)^2$ y $4ac - b^2$ son siempre positivas, de lo cual se obtiene que $(2ax+b)^2 + (4ac - b^2) > 0$, es decir,

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Análogamente se obtiene que si $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo 39 *Resolver las siguientes inecuaciones*

1. $x^2 + 2x + 7 > 0$

   Solución: *Tenemos que* $\triangle = -24 < 0; a = 1 > 0$*. Usando la propiedad 21 tenemos que*
$$S = \mathbb{R}$$

2. $2x^2 + 2x + 3 < 0$

   Solución: *Tenemos que* $\triangle = -20 < 0; a = 2 > 0$*. Usando la propiedad 21 tenemos que*
$$S = \phi$$

3. $-x^2 + 2x - 4 > 0$

   Solución: *Tenemos que* $\triangle = -12 < 0; a = -1 < 0$*. Usando la propiedad 21 tenemos que*
$$S = \phi$$

4. $-x^2 - 3x - 5 < 0$

   Solución: *Tenemos que* $\triangle = -11 < 0; a = -1 < 0$*. Usando la propiedad 21 tenemos que*
$$S = \mathbb{R}$$

□

Ejemplo 40 *Resolver la inecuación*

$$\frac{\sqrt{2} \cdot x}{x+1} < -\frac{1}{x}$$

Solución: La restricciones son $x + 1 \neq 0 \ \wedge \ x \neq 0$, luego el conjunto de restricción es

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

La resolución del problema lo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}x}{x+1} &< -\frac{1}{x} \\ \frac{\sqrt{2}x}{x+1} + \frac{1}{x} &< 0 \\ \frac{\sqrt{2}x^2 + x + 1}{x(x+1)} &< 0 \end{aligned}$$

Como $\triangle(\sqrt{2}x^2 + x + 1) = 1 - 4\sqrt{2} < 0; a = \sqrt{2} > 0$, luego se tiene que

$$\sqrt{2}x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathcal{R}.$$

Para continuar con el desarrollo, utilizaremos una tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,0[$	0	$]0,\infty[$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{2}x^2+x+1$	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{\sqrt{2}x^2+x+1}{x(x+1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

así se obtiene que

$$S =]-1,0[$$

□

Ejemplo 41 *Resolver la inecuación*

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x}{x-1} \leq 2$$

Solución: La restricciones son $x+1 \neq 0 \ \wedge \ x-1 \neq 0$, luego el conjunto de restricción es

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} - \{-1,1\}$$

La resolución o búsqueda de la solución del problema, la obtenemos de lo tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x}{x-1} &\leq 2 \\
\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x}{x-1} - 2 &\leq 0 \\
\frac{(2x-1)(x-1) + x(x+1) - 2(x^2-1)}{x^2-1} &\leq 0 \\
\frac{x^2-2x+3}{x^2-1} &\leq 0
\end{aligned}$$

Como $\triangle(x^2-2x+3) = 4-12 = -8 < 0;\ a = 1 > 0$, luego tenemos que

$$x^2-2x+3 > 0, \forall x \in \mathcal{R}.$$

Para concluir el desarrollo usaremos una tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,\infty[$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+3	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

así tenemos que

$$S =]-1,1[$$

□

Teorema 22 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ entonces:*

1. $|x| \leq y \Leftrightarrow (-y \leq x \leq y)$.
2. $|x| \geq y \Leftrightarrow (y \geq x \vee x \leq -y)$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que $|x| \leq y$.

Como $x \leq |x| \wedge |x| \leq y$, entonces por transitividad

$$x \leq y. \tag{1.18}$$

Además

$$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq -|x|$$

pero por Proposición 15 parte (5) tenemos que

$$-|x| \leq x$$

y nuevamente por transitividad

$$-y \leq x \tag{1.19}$$

Luego por (1.18) y (1.19) tenemos que $-y \leq x \leq y$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $-y \leq x \leq y$.

Caso 1: Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$

además

$$x \leq y$$

luego

$$|x| \leq y.$$

Caso 2: Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ es decir, $-|x| = x$

además

$$-y \leq x$$

luego

$$-y \leq -|x| \Leftrightarrow |x| \leq y.$$

En consecuencia

$$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$$

con lo cual la demostración de (1) está terminada.

Demostremos ahora (2) usando la equivalencia

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q})$$

aplicándola en (1) obtenemos

$$|x| > y \Leftrightarrow (x > y \vee x < -y)$$

la cual puede ser extendida a

$$|x| \geq y \Leftrightarrow (x \geq y \vee x \leq -y)$$

Así la demostración de (2) está terminada. $\square$

Observación: Notemos que el teorema precedente es válido para todo $y \in \mathbb{R}$, sin embargo el caso en que $y < 0$ nos permite proceder de manera más rápida, es decir, si $y < 0$ entonces la proposición $|x| < y$ es falsa, y la proposición $|x| > y$ es verdadera.

El hecho de asegurar que la expresión $|x| < y$ es falsa se traduce diciendo que el conjunto solución de dicha inecuación es

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Análogamente si la expresión $|x| > y$ es verdadera, su conjunto solución es

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}.$$

Ejemplo 42 *Resolver la inecuación*

$$|x| < -2$$

Considere la observación anterior, luego el conjunto solución es $\mathcal{S} = \emptyset$.

Pero si consideramos la inecuación

$$|x| > -2$$

tenemos que la solución es $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 43 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$|x + 2| \geq 3.$$

Solución: Aplicando el teorema anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} |x+2| \geq 3 \quad &\Leftrightarrow \quad x+2 \geq 3 \ \vee \ x+2 \leq -3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \ \vee \ x \leq -5 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [1, \infty[\cup]-\infty, -5] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} -]-5, 1[. \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la inecuación $|x + 2| \geq 3$ está dado por

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} -]-5, 1[.$$

$\square$

Ejemplo 44 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$|x + \sqrt{2}| \leq \pi.$$

Solución: De acuerdo al teorema precedente se tiene que:

$$\begin{aligned}|x+\sqrt{2}|\leq \pi &\Leftrightarrow -\pi \leq x+\sqrt{2}\leq \pi\\ &\Leftrightarrow -\pi-\sqrt{2}\leq x\leq \pi-\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow x\in[-\pi-\sqrt{2},\pi-\sqrt{2}].\end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la inecuación esta dado por

$$\mathcal{S}=[-\pi-\sqrt{2},\pi-\sqrt{2}].$$

Teorema 23 (Desigualdad Triangular) *Sean $x,y\in\mathbb{R}$ entonces*

$$|x+y|\leq |x|+|y|.$$

Demostración: Tenemos por Proposición 15 parte (6) que para todo $x,y\in\mathbb{R}$

$$-|x|\leq x\leq |x| \tag{1.20}$$
$$-|y|\leq y\leq |y| \tag{1.21}$$

luego sumando (1.20) y (1.21) se tiene que

$$-(|x|+|y|)\leq x+y\leq |x|+|y|$$

así

$$|x+y|\leq |x|+|y|.$$

□

Corolario 24 *Sean $x,y\in\mathbb{R}$ entonces $||x|-|y||\leq |x-y|$.*

Demostración: Notemos que $|x|=|(x-y)+y|\leq |x-y|+|y|$

De lo cual se obtiene

$$|x|-|y| \leq |x-y|. \tag{1.22}$$

Por otro lado $|y|=|(y-x)+x|\leq |y-x|+|x|$

$$\begin{aligned}|y|-|x| &\leq |y-x|\\ \Leftrightarrow |y|-|x| &\leq |x-y|\\ \Leftrightarrow |x|-|y| &\geq -|x-y|. \qquad (1.23)\end{aligned}$$

Luego por (1.22) y (1.23) tenemos que

$$-|x-y|\leq |x|-|y|\leq |x-y| \Leftrightarrow ||x|-|y||\leq |x-y|.$$

□

Ejemplo 45 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$|x-\sqrt{2}| \quad \leq \quad \sqrt{x^2-3}. \tag{1.24}$$

Solución: La restricción se obtiene de

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3 \geq 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{3}\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3}\}\\ &=]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty[.\end{aligned}$$

Ahora elevando al cuadrado en la desigualdad (1.24) se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & |x-\sqrt{2}|^2 & \leq & x^2-3\\ \Leftrightarrow & x^2-2\sqrt{2}x+2 & \leq & x^2-3\\ \Leftrightarrow & 5 & \leq & 2\sqrt{2}x\\ \Leftrightarrow & x & \geq & \dfrac{5}{2\sqrt{2}}.\end{array}$$

Tenemos así que el conjunto solución de la inecuación (1.24) está dado por

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \left[\frac{5}{2\sqrt{2}}, \infty\right[= \left[\frac{5}{2\sqrt{2}}, \infty\right[.$$

□

Ejemplo 46 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \quad \geq \quad 0. \tag{1.25}$$

Solución: La restricción es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4-|x-2| \geq 0 \wedge x-1 \neq 0 \wedge x^2-x+2 \neq 0\}$. Analicemos cada caso:

1.
$$\begin{array}{rrcl} & 4-|x-2| & \geq & 0\\ \Leftrightarrow & |x-2| & \leq & 4\\ \Leftrightarrow & -4 \leq x-2 & \wedge & x-2 \leq 4\\ \Leftrightarrow & -2 \leq x & \wedge & x \leq 6\\ \Leftrightarrow & x \in [-2, 6]. & & \end{array}$$

2.
$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

3. Debemos encontrar los $x \in \mathbb{R}$ de modo que $x^2-x+2 \neq 0$, ahora bien como el discriminante de la ecuación cuadrática es $\triangle = -7 < 0$ y $a = 1 > 0$ tenemos por Proposición(21) parte (1) que la ecuación $x^2-x+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, lo cual en particular nos asegura que $x^2-x+2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

   Recuerde que el conjunto restricción corresponde a la intersección de los casos anteriores, ya que cada una de ella debe cumplirse, entonces que $\mathcal{R} = [-2, 6] - \{1\}$.

Resolveremos la inecuación, con el apoyo de una tabla, pero antes analicemos algunos factores, $\sqrt{4-|x-2|} \geq 0$ y $x^2 - x + 2 > 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$, basta sólo resolver la inecuación

$$\frac{(x^2-2x-3)}{(x-1)} \quad \geq \quad 0 \tag{1.26}$$

para tener que

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \geq 0.$$

Resolvamos entonces (1.26)

$$\frac{(x^2-2x-3)}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x+1)}{x-1} \geq 0. \tag{1.27}$$

Consideremos ahora la siguiente tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,3[$	3	$]3,\infty[$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

De esto es claro que (1.26) se satisface en $[-1,1[\cup[3,\infty[$, luego la solución a la inecuación (1.25) es

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap ([-1,1[\cup[3,\infty[) = [-1,1[\cup[3,6].$$

□

Ejemplo 47 *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$|x-1| + |x-2| \quad \leq \quad |x-3| \tag{1.28}$$

Solución: Para dar solución a este problema consideremos la siguiente tabla, que nos ayuda en la clasificación de los casos que debemos estudiar.

	$]-\infty,1[$	$]1,2[$	$]2,3[$	$]3,\infty[$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$

Note que esta tabla no permite resolver la inecuación como en el ejemplo anterior, pero gracias a la definición de valor absoluto podemos obtener la siguiente información:

	$]-\infty,1[$	$]1,2[$	$]2,3[$	$]3,\infty[$
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	$x-1$	$x-1$	$x-1$
$\|x-2\|$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$	$x-2$
$\|x-3\|$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$x-3$

Esto nos sugiere estudiar los siguientes casos cuatro casos:

1. Consideremos $x \in]-\infty, 1]$, luego (1.28) es equivalente a

$$\begin{array}{rrcl} & -(x-1)+(-(x-2)) & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & 1-x+2-x & \leq & 3-x \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 0. \end{array}$$

   Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_1 =]-\infty, 1] \cap [0, \infty[= [0, 1].$$

2. Consideremos $x \in]1, 2]$, luego (1.28) es equivalente a

$$\begin{array}{rrcl} & x-1+(-(x-2)) & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & x-1+2-x & \leq & 3-x \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2. \end{array}$$

   Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_2 =]1, 2] \cap]-\infty, 2[=]1, 2].$$

3. Consideremos $x \in]2, 3]$, luego (1.28) es equivalente a

$$\begin{array}{rrcl} & x-1+x-2 & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & 2x-3 & \leq & 3-x \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2. \end{array}$$

   Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_3 =]2, 3] \cap]-\infty, 2[= \emptyset.$$

4. Consideremos $x \in]3, \infty[$, luego (1.28) es equivalente a

$$\begin{array}{rrcl} & x-1+x-2 & \leq & x-3 \\ \Leftrightarrow & 2x-3 & \leq & x-3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 0. \end{array}$$

   Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_4 =]3, \infty[\cap]-\infty, 0] = \emptyset.$$

Tenemos entonces que la solución de la inecuación (1.28) es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = [0, 2].$$

□

Ejercicio 48 *Resolver las siguientes inecuaciones*

1. $\dfrac{x}{x+1} \leq 1$ *Rp.* $]-1,\infty[$
2. $(3x+1)(x+2) > 0$ *Rp.* $]-\infty,-2[\cup]-1/3,\infty[$
3. $(x+1)(x+2) < (x+1)(4x-7)$ *Rp.* $]-\infty,-1[\cup]3,\infty[$
4. $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} < 2$ *Rp.* $]-1,1[$
5. $\dfrac{x^2(x^2+1)(x+2)}{(x-1)(x^2+3)} \geq 0$ *Rp.* $]-\infty,-2]\cup\{0\}\cup]-1,\infty[$
6. $\sqrt{3x+1} < 2$ *Rp.* $[1/3,5/3[$
7. $\sqrt{2x+5} \leq 3-x$ *Rp.* $[-5/2,4-\sqrt{12}[$
8. $\sqrt{x-3} \geq 7-2x$ *Rp.* $[13/4,\infty[$.
9. $\sqrt{\sqrt{2+1}-1} < \sqrt{x}$ *Rp.* $]0,\infty[$.
10. $|5x-7| > 2-x$ *Rp.* $]-\infty,5/4[\cup]3/2,\infty[$
11. $|3x-5| > x+2$ *Rp.* $[3/4,7/2]$
12. $|2x-1|-|x-2| < 3x-7$ *Rp.* $]4,\infty[$
13. $||2x-1|-x| < 3x-5$ *Rp.* $]2,\infty[$
14. $\sqrt{2x+1} < |x|+3$ *Rp.* $]-1/2,\infty[$

1.5. Axioma del Supremo

Definición 12 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $c \in \mathbb{R}$. Se dice que*

1. *c es una cota superior de A, si y sólo si*

$$(\forall a \in A)(a \leq c).$$

2. *a es una cota inferior de A, si y sólo si*

$$(\forall a \in A)(a \geq c).$$

3. *A es un* conjunto acotado superiormente*, si y sólo si existe una cota superior para el conjunto A.*

4. *A es un* conjunto acotado inferiormente*, si y sólo si existe una cota inferior para el conjunto A.*

5. *A es un* conjunto acotado*, si y sólo si A es acotado superior e inferiormente se dice que*

Observación: Si $A = \emptyset$, se dice que A es un conjunto acotado.

Definición 13 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $L \in \mathbb{R}$.*
Se dice que L es el supremo de A, si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

1. *L es una cota superior de A.*

2. *Si L' es una cota superior de A, entonces $L \leq L'$.*

Notación: Si existe el supremo se denota por $\sup(A) = L$.
Observación: Note que por definición, $\sup(A)$ es la menor de las cotas superiores de A.

Definición 14 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $L \in \mathbb{R}$.*
Se dice que L es el ínfimo de A, si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

1. *L es una cota inferior de A.*

2. *Si L' es una cota inferior de A, entonces $L' \leq L$.*

Notación: Si existe el ínfimo, se denota por $\inf(A) = L$.
Observación: Note que por definición, $\inf(A)$ es la mayor de las cotas inferiores de A.

Ejemplo 49 *Consideremos los conjuntos $A =]-\infty, 5]$ y $B =]7, \infty[$, en este caso tenemos que el conjunto A no es acotado inferiormente, pues no existe $r \in \mathbb{R}$ de modo que $r \leq a$ para todo $a \in A$, en cambio el conjunto B si es acotado inferiormente pues existe $r = 7 \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq b$ para todo $b \in B$. Análogamente podemos ver que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B no lo es.*

Además que todo $r \in [5, \infty[$ es una cota superior para A, luego tenemos que el conjunto de todas las cotas superiores de A es $[5, \infty[$, el $\sup(A) = 5$. Del mismo modo tenemos que todo $r' \in]-\infty, 7]$ es una cota inferior para B, luego el conjunto de todas las cotas inferiores de B es $]-\infty, 7]$, el $\inf(B) = 7$.

Ejemplo 50 *Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq \sqrt{2}\}$. Determine el conjunto de cotas superiores e inferiores del conjunto A.*

Notemos que

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x-3 \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2}+3 \leq x \leq \sqrt{2}+3\} \\ &= [-\sqrt{2}+3, \sqrt{2}+3]. \end{aligned}$$

De acuerdo a esto podemos ver que A es un conjunto acotado superior e inferiormente pues existen $r = \sqrt{2}+3$ y $r' = -\sqrt{2}+3$ de modo que $r' \leq a \leq r$ para todo $a \in A$. Además el conjunto de todas las cotas inferiores está dado por $]-\infty, -\sqrt{2}+3]$ y el de las cotas superiores está dado por $[\sqrt{2}+3, \infty[$.

Teorema 25 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota superior de A. Entonces,*

$$L = \sup(A) \text{ si y sólo si } (\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x > L - \epsilon).$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Procedamos por absurdo, esto es supongamos que

$$(L = \sup A) \wedge (\exists\, \epsilon > 0)(\forall x \in A)(x \leq L - \epsilon) \tag{1.29}$$

por (1.29) existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \leq L - \epsilon, \quad \forall x \in A$$

esto nos entrega que $L - \epsilon$ es una cota superior de A (por definición de cota), pero $L = \sup(A)$, luego $L \leq L - \epsilon$ de aquí que $\epsilon \leq 0$, lo cual contradice $\epsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Procediendo de la misma forma, sea L cota superior de A y supongamos que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x > L - \epsilon) \wedge L \neq \sup(A) \tag{1.30}$$

Como $L \neq \sup(A)$ y L es cota superior de A, entonces L no es la menor de las cotas superiores de A, esto es, existe $L^{'}$ cota superior de A tal que

$$L^{'} \leq L$$

luego existe $\epsilon > 0$ tal que

$$L^{'} + \epsilon = L \tag{1.31}$$

pero por (1.30), existe $x \in A$ tal que

$$x > L - \epsilon \tag{1.32}$$

Así por (1.31) y (1.32) tenemos que

$$x > L^{'}, \quad x \in A$$

lo cual es una contradicción pues $L^{'}$ es una cota superior de A. $\square$

Teorema 26 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota inferior de A. Entonces,*

$$L = \inf(A) \text{ si y sólo si } (\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x < L + \epsilon).$$

Demostración: Ejercicio (análogo a la demostración del teorema anterior). $\square$

1.5.1. Axioma del Supremo

El conjunto de los números reales con el axioma del supremo recibe el nombre de **cuerpo ordenado y completo**, o **cuerpo totalmente ordenado** lo cual caracteriza $\mathbb{R}$.

Axioma 8 *Si $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces el supremo de A existe y es un elemento de $\mathbb{R}$.*

Propiedad 27 *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado.*

Demostración: Supongamos por absurdo que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Luego por el axioma del supremo existe $\sup(\mathbb{N}) = L, L \in \mathbb{R}$, esto es $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(n > L - \epsilon)$

En particular si consideramos $\epsilon = 1 > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > L - 1$$

es decir,

$$n + 1 > L$$

pero $n + 1 \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción pues $L = \sup(\mathbb{N})$. □

Teorema 28 (Propiedad arquimediana)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists\, n \in \mathbb{N})(x < n).$$

Demostración: Procedamos por absurdo, esto es

$$(\exists\, x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(x \geq n).$$

Es claro que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, luego tenemos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, lo cual es una contradicción. □

Corolario 29 *La propiedad arquimediana la podemos expresar de manera equivalente como sigue*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})\left(\frac{1}{n} < \epsilon\right).$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\frac{1}{\epsilon}$, entonces por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

de donde

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

concluyendo así la demostración. □

Ejemplo 51 *Sea*

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demostrar que $\sup(A) = \frac{1}{2}$.

1. En primer lugar demostremos que $L = \frac{1}{2}$ es una cota superior de A.

   Claramente
$$2n < 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   luego
$$\begin{array}{rrcl} & \frac{2n}{2n+1} & < & 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & \frac{n}{2n+1} & < & \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$
   así
$$x_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   con lo cual se tiene que $L = \frac{1}{2}$ es cota superior de A.

2. Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x_n \in A)(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon)$, lo que equivale a probar la existencia de $n \in \mathbb{N}$ de modo que
$$\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$
   Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, ahora bien por Teorema (28) tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$\begin{array}{rrcl} & n & > & \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon} \\ \Leftrightarrow & 4n\epsilon & > & 1-2\epsilon \\ \Leftrightarrow & 2n\epsilon & > & \frac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & n - 2n\epsilon + \frac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & 2n\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) + \frac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & (2n+1)\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{n}{2n+1} & > & \frac{1}{2} - \epsilon. \end{array}$$
   Así
$$(\forall \epsilon > 0)\left(\exists\, x_n = \frac{n}{2n+1} \in A\right)\left(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon\right).$$

Luego
$$\sup(A) = \frac{1}{2}.$$

□

Ejemplo 52 *Sea*
$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$
Demostrar que $\inf(A) = 0$.

1. En primer lugar demostremos que $L = 0$ es una cota inferior de A.

   Es evidente que
   $$0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   luego
   $$0 < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   con lo cual se tiene que $L = 0$ es cota inferior de A.

2. Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists x_n \in A)(x_n < \epsilon)$, este hecho es clara consecuencia del Corolario (29), así
   $$(\forall \epsilon > 0)\left(\exists\, x_n = \frac{1}{n} \in A\right)(x_n < \epsilon)\,.$$

Luego
$$\text{ínf}(A) = 0.$$

□

Teorema 30 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$. Entonces, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.*

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Claramente si $x < 0 < y$ existe $p = 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$ y el teorema queda demostrado en este caso.

Supongamos ahora que $0 < x < y$. Sea
$$\epsilon = y - x > 0$$
luego por la corolario de propiedad arquimediana tenemos
$$\frac{1}{n} < \epsilon = y - x$$

Dado $nx \in \mathbb{R}$, nuevamente por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$m > nx.$$
Sea m el mínimo que satisface $m > nx$, luego
$$m - 1 \leq nx$$
así tenemos
$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y.$$
Por lo tanto
$$x < \frac{m}{n} < y,$$
es decir, existe $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.

Por otra parte. Supongamos que $x < y < 0$, entonces $0 < -y < -x$ y por lo anterior existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$-y < p < -x.$$

Luego

$$x < -p < y$$

y como $-p \in \mathbb{Q}$ queda completa la demostración. $\square$

Definición 15 *Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si entre dos números reales cualesquiera existe algún elemento de X.*

Observación: De acuerdo al teorema y definición anteriores claramente el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

1.6. Ejercicios Propuestos

1. **Grupos**

   a) En $\mathbb{Z}$ se define la operación $*$ por:

   $$x * y = xy + x + y.$$

   Decida si $\mathbb{Z}$ bajo esta operación es un grupo.

   b) Sean $G = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ y $*$ la operación definida por:

   $$(x, y) * (x', y') = (xx', y + y')$$

   Decida si G bajo esta operación es un grupo.

   c) Sea $G = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, se define la suma

   $$(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$$

   Demuestre que G bajo esta operación es un grupo abeliano.

   d) Sea G un grupo. Demuestre que para todo $a, b \in G$, la ecuación

   $$ax = b$$

   tiene única solución.

   e) Sea G un grupo y H un subconjunto no vacío de G. Se dice que H es un subgrupo de G si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen

   I) $(\forall a, b \in H)(ab \in H)$
   II) $(\forall a \in H)(a^{-1} \in H)$

   De acuerdo a esto demuestre que:

   I) $(\mathbb{Q}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

II) $Z = \{g \in G \mid (\forall h \in G)(gh = hg)\}$ es un subgrupo de G.

2. **Resolver las siguientes ecuaciones**

   a) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{x+3}$

   b) $\sqrt{x-3} + x = 6$

   c) $\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{27-3x^2} = |x| + 5$

   d) $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x} = |x-3|$

   e) $\sqrt{\sqrt{x}+3} - \sqrt{\sqrt{x}-3} = \sqrt{2\sqrt{x}}$

   f) $x + \sqrt{6-4x^2-x} = 4x^2$

   g) $\sqrt{|x+1|-6} = 8x - x^2 - 15$

   h) $x - 1 = \sqrt{x^2-x+2}$

   i) $||2x+3| - |x-3|| = |3x+2| + x$

   j) $||2x+1|| = 2x$

   k) $\dfrac{x-5}{x^2-9} + \dfrac{x+3}{x-3} = 1$

   l) $\dfrac{x}{x^2-4} - \dfrac{x+2}{x-2} = 1$

   m) $\dfrac{x+m}{m} - \dfrac{x+n}{n} = \dfrac{m^2+n^2}{mn} - 2$

   n) $\left(\dfrac{x+\frac{b-x}{1+bx}}{1-\frac{x(b-x)}{1+bx}} - \dfrac{b-\frac{b-x}{1-bx}}{1-\frac{b(b-x)}{1-bx}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{b}{x} - \dfrac{x}{b}\right) = \dfrac{2}{b}$

3. **Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones**

   a) $\left.\begin{array}{rcl} x+3y & = & 4 \\ 2x+7y & = & 15 \end{array}\right|$

   b) $\left.\begin{array}{rcl} 2x+3z & = & 4 \\ 2x-6y+7z & = & 15 \\ x-2y+5z & = & 10 \end{array}\right|$

   c) $\left.\begin{array}{rcl} x+4y+3z & = & 1 \\ 2x+5y+4z & = & 4 \\ x-3y-2z & = & 5 \end{array}\right|$

   d) $\left.\begin{array}{rcl} 4x+y-2z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ 11x-4y+-z & = & 0 \end{array}\right|$

   e) $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ 3x+4y & = & 9 \end{array}\right|$

f) $$\left.\begin{array}{rcl} x^2+xy+y^2 &=& 13 \\ x+y &=& 4 \end{array}\right|$$

g) $$\left.\begin{array}{rcl} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} &=& \frac{25}{12} \\ x^2-y^2 &=& 7 \end{array}\right|$$

h) $$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2+2x &=& 13 \\ 3x+2y^2 &=& 4 \end{array}\right|$$

i) $$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 2wx \\ y &=& 4wy \\ z &=& wz \\ 2x^2+4y^2+z^2 &=& 8 \end{array}\right|$$

j) $$\left.\begin{array}{rcl} 2x-wy &=& 0 \\ 2y-wx &=& 0 \\ z+wz &=& 0 \\ z^2+xy-4 &=& 0 \end{array}\right|$$

k) $$\left.\begin{array}{rcl} 2(y+z)+wyz &=& 0 \\ 2(x+z)+wxz &=& 0 \\ 2(y+x)+wyx &=& 0 \\ xyz &=& 64 \end{array}\right|$$

l) $$\left.\begin{array}{rcl} x+w(x-3) &=& 0 \\ y+w(y-4) &=& 0 \\ z &=& wz \\ (x-3)^2+(y-4)^2 &=& z^2 \end{array}\right|$$

m) $$\left.\begin{array}{rcl} yz &=& w(y+z) \\ xz &=& w(x+z) \\ xy &=& w(y+x) \\ xy+xz+yz &=& 5 \end{array}\right|$$

4. Considere la igualdad
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$$
   a) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ está definida.
   b) Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ que la satisfacen.

5. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   a) $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}>\frac{1}{2}\right)$
   b) $(\forall a, b \in \mathbb{R})\,(a^2+b^2 \geq 2ab)$
   c) $(\forall a \in \mathbb{R})\left(0 \leq a \Rightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \leq a\right)$
   d) $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}\right)$

e) $(\forall a, b \in \mathbb{R}^-)(a < b \Rightarrow a^2 > b^2)$

f) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(x < y \Rightarrow \frac{x}{y} < 1\right)$

g) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq y \Rightarrow x \leq 2y)$

h) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq y \Rightarrow y^{-1} \leq x^{-1})$

i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4})$

j) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(0 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{x}{y+1} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x+1}{y+1})$

k) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(|y - x| = |y + x|) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

l) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(2x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20})$

m) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((2 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 2) \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3)$

n) $(\forall x, y \in \mathbb{R})x^3 + y^3 \geq x^2 - xy + y^2$

ñ) $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq b, n \in \mathbb{N}) \left(\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \dfrac{a + nb}{n}\right)$

o) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|)$

6. Considere en $\mathbb{R}$ la ecuación $m + \sqrt{x} = x$, con $m \in \mathbb{R}$.

   a) Determine todos los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación tiene solución.

   b) Encuentre la solución para $m = -\dfrac{1}{8}$

7. Determine en los siguientes casos condiciones sobre el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que las ecuaciones

   a) $x^2 + \lambda x + 3 = 0$

   b) $x^2 - 2(\lambda + 1)x + 3 = 0$

   c) $x^2 + 2(\lambda + 1)x + 3\lambda = 0$

   d) $\lambda x^2 - 2x + 3\lambda = 0$

   tengan

   i) Soluciones reales y distintas.

   ii) Soluciones reales e iguales.

   iii) No tengan solución.

8. **Simplificar al máximo las siguientes expresiones**

   a) $\frac{a^2}{b} - \frac{a^2-b^2}{a+b} : \frac{a-b}{b} + \frac{b}{a}$

   b) $\dfrac{1}{a + 2 - \frac{a+1}{a-\frac{1}{a}}}$

   c) $(a^2 - b^2) : \left[\left(\dfrac{a^2 + ab}{b^2 + ab}\right) : \left(\dfrac{a^2 - ab}{b^2 - ab}\right)\right]$

d) $\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}\right)\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}\right)$

e) $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{a^2}{b^3}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}\right)}{\left(\frac{a+2b}{a+b}+\frac{a}{b}\right):\left(\frac{a+2b}{a}-\frac{a}{a+b}\right)}$

f) $\left(\dfrac{\frac{a+b}{2}-a}{\frac{a+b}{2}-b}\right)^3-\dfrac{\frac{a+b}{2}-2a+b}{\frac{a+b}{2}+a-2b}$

g) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}}{x^3-1}-\dfrac{\frac{x^2+1}{x^4-x^3}-\frac{1}{x^3-x^2}}{x^3+1}$

h) $\dfrac{\left(\frac{x(x+y)+y(y-x)}{y^2-x^2}\right)\left(\frac{(x+2y)x+y^2}{xy}\right)}{\frac{y^2+x(x+2y)}{y(x+2y)}}$

i) $\dfrac{3x+2}{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{1-x}}$

j) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+3}}$

k) $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

l) $\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+3x-1}-6x}{3x-\sqrt{x^2+x+1}}$

m) $\dfrac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}}}$

n) $\dfrac{x}{\sqrt[n]{x^m}+\sqrt[m]{a^n}}$, n, m pares.

ñ) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-1}\cdot\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x-1}}$

9. **Problemas de planteo**

a) Si $a:b=2:3$ y $x=\dfrac{3a^2-2b+b^2}{3a+2b}$, expresar a en tanto % de x.

b) Para la altura del centro de gravedad de un tronco de cono rige la fórmula siguiente:
$$X=\frac{R^2+2Rr+3r}{4(R^2+Rr+r^2)}\cdot b$$
¿Qué tanto % de b mide X, si r mide 50 % de R?.

c) En un triángulo rectángulo se sabe que el cateto mayor mide 96 % de la hipotenusa. ¿Qué tanto % de la hipotenusa mide el cateto menor?.

d) La ley de Newton nos da $F=m\cdot a$. ¿Qué tanto % aumenta la aceleración a, si la fuerza F aumenta en 42 % y la masa disminuye en 4 %?.

e) Las áreas A y B de la figura (1.1) están en la razón $2:3$. Expresar r en tanto % de R.

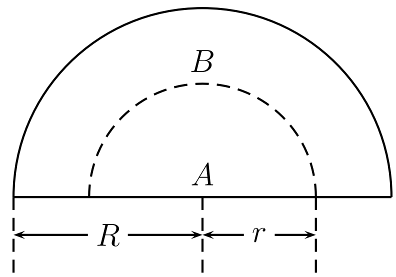


Figura 1.1: Situación del Problema 9e.

f) ¿En qué tanto % hay que aumentar el radio de una esfera para que su volumen aumente en 33,1 %?.

g) Los diámetros de dos cilindros son entre si como 3 : 4 y sus alturas como 5 : 6. ¿Qué tanto % del volumen del mayor mide el volumen del menor?.

h) Determinar dos números enteros consecutivos cuya suma de cuadrados se 128,525.

i) Si A hace un trabajo en tres horas y B lo hace en cinco horas. ¿Cuánto tiempo demoran en hacer el trabajo ambos juntos?.

j) Hallar tres números consecutivos tales que si el menor se divide entre 20, el mediano entre 27 y el mayor entre 41, la suma de los cocientes es 9.

k) A tiene el doble de dinero que B. Si A le da a B 34 pesos. A tendrá los 5/11 de lo que tenga B. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?.

l) Dos trabajadores uno de los cuales empieza a trabajar uno y medio días después que el otro, pueden completar un trabajo en 7 días. Si cada uno de ellos hiciera el trabajo individualmente, el primero habría necesitado 3 días más que el segundo que empezó después. ¿Cuántos días tardará cada obrero en realizar el trabajo individualmente?.

m) Un ingeniero contrata a un técnico para una cierta labor. Para esto le ofrece un sueldo anual de $500,000 y un lingote de oro. Al cabo de siete meses el técnico termina su trabajo, por lo que recibe $250,000 y el lingote de oro. ¿Cuál es el valor del lingote?.

n) Un cierto número de estudiantes deben acomodarse en una residencial. Si se ubicaran dos estudiantes por habitación entonces quedarían dos estudiantes sin pieza. Si se ubicaran tres estudiantes por habitación entonces sobrarían dos piezas. ¿Cuántas habitaciones disponibles hay en la residencial y cuántos estudiantes deben acodarse en ella?.

ñ) Cuando el precio de una marca popular de artículos de video es $300 por unidad, una tienda vende 15 unidades a la semana. Sin embargo cada vez que el precio se reduce en $10 las ventas aumentan en 2 unidades a la semana. ¿Qué precio de venta debe ponerse para obtener ingresos semanales de $7,000?.

o) El cuerpo de la figura (1.2) está formado por una semiesfera, un cilindro y un cono. Calcular x, si el volumen total mide $112,5\pi[cm^3]$.

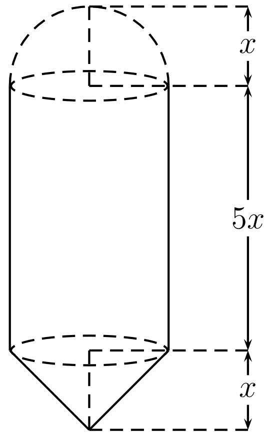


Figura 1.2: Situación del Problema.9o

p) Un estanque con cierta cantidad de agua tiene forma de cono invertido. Al agregarle 10 litros, como muestra la figura (1.3), el nivel de agua sube en un 20 %. Si la base del cono fuese reducida en un 40 %, manteniendo la misma altura resultaría un cono que estaría lleno con la cantidad de agua inicial.

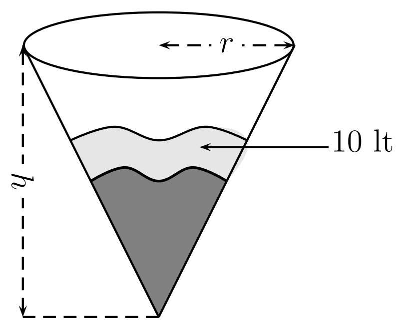


Figura 1.3: Situación del Problema.9p

Sabiendo que la altura del estanque es 50cm. Calcular el radio inicial y el volumen de agua contenido en un comienzo.

10. **Resolver las siguientes inecuaciones**

a) $\dfrac{x-1}{1-x} \leq 2x$

b) $(x+2)(x+1) \leq 0$

c) $\dfrac{x+3}{x} \leq 2$

d) $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} \leq 0$

e) $x - \dfrac{2x-3}{x} \geq 1 - 3x$

f) $\dfrac{34}{x-4} \leq \dfrac{2}{x-1} - 5$

g) $\dfrac{x-2}{x+2} \geq \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{x-1}{x^2-4}$

h) $\dfrac{13-5x}{x^2+x+1} \leq \dfrac{2}{x-2}$

i) $\dfrac{2(3|x+26|)}{155(x+6)} < \dfrac{533}{155(5x-1)}$

j) $\sqrt{-4x^2+25} \leq 3$

k) $\dfrac{\sqrt{2x-1}(x+1)}{(x^2+1)(x-2)} \geq 0$

l) $\sqrt{\sqrt{1-x}+1} \leq x-1$

m) $\sqrt{2-x} - 2\sqrt{x} \leq \sqrt{x-2}$

n) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{3x+1} \leq \sqrt{5x-2}$

ñ) $\sqrt{1-|x|} > 1-3x$

o) $\dfrac{x^2+2x+24}{\sqrt{2x+1}(x^2+x+5)} \geq 0$

p) $1 - \left|\dfrac{1}{x}\right| \geq x$

q) $\sqrt{2-|x^2-x|} \leq \sqrt{3}$

r) $\dfrac{x}{|x+2|} \leq \dfrac{2}{x(x+2)}$

s) $|2-|x-1|| \leq 1$

t) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \geq |x-3|$

u) $\dfrac{||x+3|-2|}{||x|-1|} \geq 2$

v) $|x+1| + ||x-1|+3| \leq |x+2|+8$

w) $\left|1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right| \geq 1$

x) $\dfrac{|x-1|-|x+1|}{|x^2-1|} \leq \dfrac{|x-1|}{x+1}$

y) $\dfrac{|x-1|(\sqrt{x+3}+|x|)}{|x+3|-|x-4|} \geq 0$

z) $3x+1+|x-1| < \sqrt{x}$

11. **Axioma del Supremo**

a) Determine el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos

i) $A = [-2,3[\cup]5,\sqrt{42}[$

ii) $A =]-3,0[\cup]\sqrt{4},6]$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$

iv) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2 \leq 0\}$

v) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|x|+1} < 2\right\}$

vi) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x+1} < 2\right\}$

vii) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x}{2} \leq |x-1| \leq \dfrac{9}{2}\right\}$

b) Sean

i) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7 < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$ y $B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < \dfrac{-1 - x(x+1)}{x+1}\right\}$

Encuentre en cada caso (si existen) el Supremo e Ínfimo correspondientes a los conjuntos $A, B, A \cup B$ y $A \cap B$.

c) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$ acotado. Se define

$$\begin{aligned} \alpha + A &= \{\alpha + a \mid a \in A\}. \\ \alpha \cdot A &= \{\alpha a \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

Demuestre que

i) $\alpha + \sup(A) = \sup(\alpha + A)$

ii) $\alpha + \text{ínf}(A) = \text{ínf}(\alpha + A)$

iii) Si α es positivo, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$

iv) Si α es positivo, entonces $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$

v) Si α es negativo, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$

vi) Si α es negativo, entonces $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha \sup(A)$

d) Sean A, B dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ y

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Demuestre que:

i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

ii) $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$

e) Demuestre que si

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2n}{n+3},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

entonces el $\sup(A) = 2$.

f) Demuestre que si

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2}{3n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

entonces el $\text{ínf}(A) = 0$.

g) Determine y demuestre si existe el supremo y el ínfimo de

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2}{n+3}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

h) Determine y demuestre si existe el supremo y el ínfimo de

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = (-1)^n \frac{5}{2n+3}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Capítulo 2

Geometría Analítica

2.1. Introducción

La geometría es una parte importante de la matemática que tiene por objetivo el estudio de las figuras que se encuentran en el plano (o en el espacio). En el desarrollo de este capítulo, usaremos la terminología habitual de geometría, entre otros

Recta: Es una línea sin principio ni fin que describe de forma idealizada de un hilo tenso en el plano formado por una cantidad infinita de puntos.

Segmento: Es una parte de la recta que se encuentra entre dos puntos en la recta que representan el principio y fin de este, llamados extremos.

Por otro lado, el concepto de analítica representa el análisis que se necesita y se ocupa para poder obtener la resolución de problemas, lo que nos lleva a la definición del concepto de "geometría analítica"que esta dada por el análisis que se realiza a las distintas figuras geométricas, que son subconjunto del plano, las cuales son definidas mediante funciones proposicionales o expresiones algebraicas.

Para representar el plano donde se encuentras las figuras, recurriremos al producto cartesiano entre conjuntos, que se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o de otra manera $\mathbb{R}^2$, que esta constituido por los "pares ordenados".

Estas ideas básicas son las que nos permitirán el estudio de algunas figuras de la geometría.

2.2. Plano Cartesiano

El producto cartesiano esta dado por

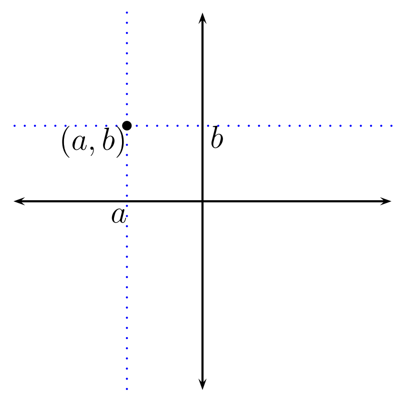
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x \ , y \in \mathbb{R}\}$$

Un elemento de $\mathbb{R}^2$, es un par ordenado (x, y), donde x es la primera coordenada o abscisa e y es la segunda coordenada u ordenada del punto (x, y)

Además dos puntos del producto cartesiano son iguales si y sólo si las abscisa y ordenadas son iguales, es decir,

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y', \text{ con } x, x', y, y' \in \mathbb{R}$$

Un representación del producto cartesiano es el plano cartesiano, que se construye con dos rectas perpendiculares (ejes, un horizontal y otro vertical) que se intersecan en un punto(origen), un elemento del producto cartesiano, se representa con la intersecarse de la recta vertical que pasa por el eje horizontal en el valor de la abscisa y una horizontal que pasa por el eje vertical en el valor de la ordenada



2.2.1. Distancia entre dos Puntos

Definición 16 *La distancia entre dos puntos equivale al valor numérico de la longitud del segmento que une estos dos puntos.*

En la recta real $\mathbb{R}$, la distancia entre dos puntos esta dada por

$$dist(a, b) = |b - a| \qquad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Por medio del teorema de Pitágoras, podemos extender la fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano.

Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, donde $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$. La distancia entre ellos la denotaremos por $dist(P_1, P_2)$

Grafiquemos los puntos P_1, P_2 en el plano cartesiano, y tracemos un triángulo rectángulo, con las rectas paralelas a los ejes coordenados.

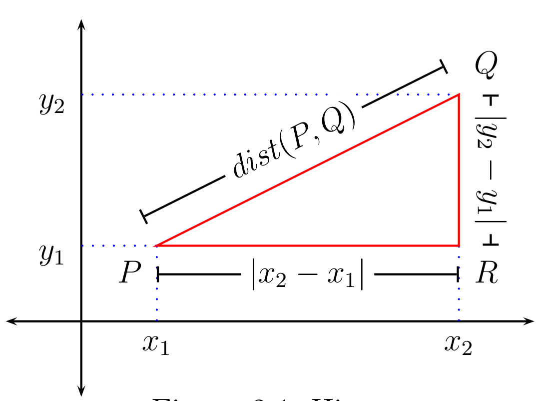


Figura 2.1: Hipotenusa

Luego por teorema de Pitágoras tenemos que

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2$$

Observación: Recordemos que la hipotenusa representa el lado que se encuentra opuesto al ángulo de 90° en la figura 2.1, el cateto opuesto que esta representado por la base del triángulo y cateto adyacente el lado restante.

$$\begin{array}{rrcl} & (\text{hipotenusa})^2 & = & (\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2 \\ \text{donde} & (dist(P_1, P_2))^2 & = & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad /\sqrt{} \\ \text{entonces} & |dist(P_1, P_2)| & = & \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}$$

Observación: La distancia representa una longitud, por lo cual está siempre es no negativa.

Definición 17 *Sean* $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ *con* $P_1 = (x_1, y_1)$ *y* $P_2 = (x_2, y_2)$ *entonces la distancia entre los dos puntos es*

$$dist(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.1}$$

Ejemplo 53 *Considere los puntos* $(-2, -1)$ *y* $(2, 2)$ *en* $\mathbb{R}^2$*, calcule la distancia entre ellos.*

Solución: Denotemos los puntos de la siguiente forma:

$$A = (-2, -1) \text{ y } B = (2, 2)$$

luego calculemos la distancia entre ellos

$$\begin{array}{rcl} dist(A, B) & = & \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-1))^2} \\ & = & \sqrt{(2 + 2)^2 + (2 + 1)^2} \\ & = & \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \\ & = & \sqrt{16 + 9} \\ & = & \sqrt{25} = 5 \end{array}$$

Por lo tanto la distancia que se encuentra entre los puntos $A = (-2, -1)$ y $B = (2, 2)$ es

$$dist(A, B) = 5.$$

Propiedad 31 *Sean* $P_1, P_2, R \in \mathbb{R}^2$ *entonces*

1. $dist(P_1, P_2) = 0$ *es equivalente a* $P_1 = P_2$.
2. $dist(P_1, P_2) = dist(P_2, P_1)$.
3. $dist(P_1, P_2) \leq dist(P_1, R) + dist(R, P_2)$.

Ejemplo 54 *Demuestre que los puntos* $(-2, -1), (2, 2), (5, -2)$ *son los vértices de un triángulo isósceles*

Solución: Sean los puntos $A = (-2, -1), B = (2, 2)$ y $C = (5, -2)$ en $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que $dist(A, B) = 5$, calculada en el ejemplo anteriormente, entonces veremos las distancias faltantes para verificar si A, B y C son los vertices de un triángulo isosceles.

$$\begin{aligned} dist(A,C) &= \sqrt{(5-(-2))^2 + (-2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dist(B,C) &= \sqrt{(5-2)^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

En resumen se tiene lo siguiente

$$dist(A,B) = dist(B,C) = 5, \quad dist(A,C) = 5\sqrt{2}$$

por lo tanto podemos concluir que los segmentos que se encuentran entre los puntos A, B y C forman un triángulo isósceles y no equilátero. □

Observación: Recordemos que un triángulo isósceles siempre esta constituido por dos lados que tienen igual longitud.

Ejemplo 55 *Encuentre todos los puntos que pertenecen a* $\mathbb{R}^2$ *y que están a una distancia igual a* 1 *del origen* $(0, 0)$.

Solución: Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $dist(Q, P) = 1$ donde $Q = (0, 0)$. Como

$$\begin{array}{ccll} dist(Q,P) & = & 1 & \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} & = & 1 & \\ \sqrt{x^2+y^2} & = & 1 & /()^2 \\ x^2+y^2 & = & 1 & \\ x^2 & = & 1-y^2 & \end{array}$$

Como $x^2 = 1 - y^2$, donde x^2 representa un número positivo, para que se cumpla la igualdad $1 - y^2$ también debe ser positivo por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} 1-y^2 & \geq & 0 \\ y^2 & \leq & 1 \quad \surd \\ |y| & \leq & 1 \end{array}$$

luego $y \in [-1, 1]$ entonces

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 1-y^2 \quad \surd \\ x & = & \pm\sqrt{1-y^2} \end{array}$$

Por lo tanto

$$P = (x,y) = (\sqrt{1-y^2}, y) \text{ o } P = (x,y) = (-\sqrt{1-y^2}, y) \text{ con } y \in [-1,1]$$

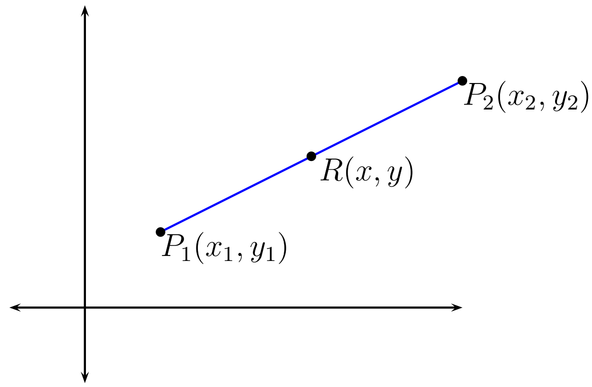
□

Observación: La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ gráficamente corresponde a una circunferencia unitaria o de radio 1 que estudiaremos más adelante.

2.2.2. Punto Medio

Definición 18 *Dados $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, los extremos de un segmento, se dice que R es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ si y sólo si*

$$dist(P_1, R) = dist(R, P_2)$$



Definición 19 *Sean $P_1, P_2, R \in \mathbb{R}^2$, se dice que R divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón r si y sólo si*

$$r = dist(P_1, R) : dist(R, P_2).$$

Esto quiere decir:

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)}.$$

Si $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $R = (x, y)$, entonces se tiene la siguiente razón:

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Despejando x obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{x - x_1}{x_2 - x} \\ r(x_2 - x) &= x - x_1 \\ x + rx &= rx_2 + x_1 \\ x(1 + r) &= rx_2 + x_1 \\ x &= \frac{rx_2 + x_1}{1 + r} \end{aligned}$$

Análogamente

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Despejando y obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{y - y_1}{y_2 - y} \\ y &= \frac{ry_2 + y_1}{1 + r} \end{aligned}$$

Así obtenemos que las coordenadas de R son :

$$R = (x, y) = \left(\frac{rx_2 + x_1}{1 + r}, \ \frac{ry_2 + y_1}{1 + r} \right)$$

El caso particular en que $r = 1$, se tiene el punto medio, y esta dado por:

$$M = (x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \ \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

Propiedad 32 *Sean P_1, P_2 y $M \in \mathbb{R}^2$, tenemos que el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ esta dado por:*

$$M = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right) \tag{2.2}$$

donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$.

Ejemplo 56 *Encuentre el punto medio del segmento $\overline{AB}$ donde $A = (5, 3)$ y $B = (-10, -2)$*

Solución: Calculemos separadamente x e y

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{-10 + 5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$$

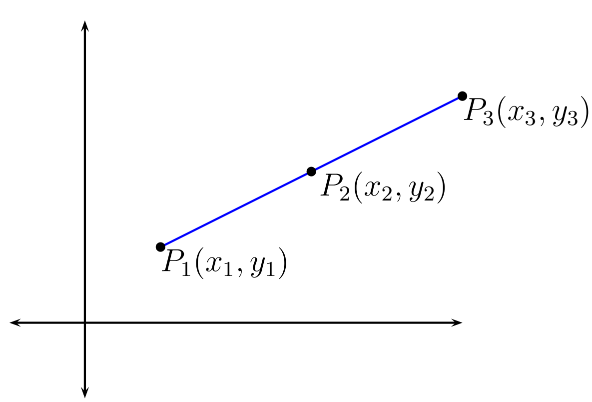
Por lo tanto el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es el punto $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. □

2.2.3. Puntos Colineales

Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, por propiedad 3 de distancia obtenemos

$$dist(P_1, P_3) \leq dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3).$$

Observando la gráfica



Se tiene que $dist(P_1, P_3) = dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$, luego

$$\begin{aligned} dist(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \\ dist(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ dist(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} dist(P_1, P_3) &= dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3) \\ \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (2.3) \end{aligned}$$

tenemos en la figura 2.2

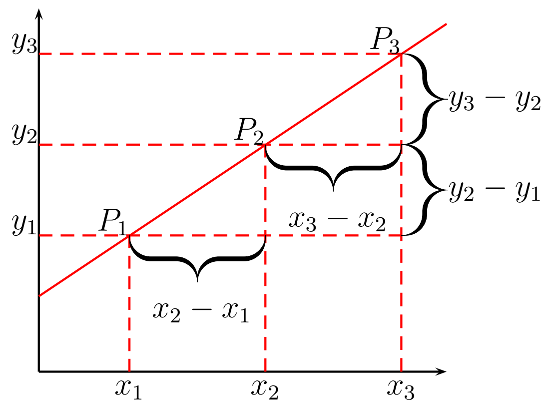


Figura 2.2:

Consideremos los siguientes cambio de variables

$$a = x_2 - x_1, \qquad b = x_3 - x_2,$$

de lo cual se tiene que $x_3 - x_1 = a + b$.

Además

$$c = y_2 - y_1, \qquad d = y_3 - y_2.$$

de manera similar obtenemos que $y_3 - y_1 = c + d$

Reemplazando en 2.3

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} &= \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \quad /()^2 \\ (a+b)^2 + (c+d)^2 &= a^2 + c^2 + 2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} + b^2 + d^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2cd + d^2 &= a^2 + c^2 + 2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} + b^2 + d^2 \\ 2ab + 2cd &= 2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \qquad /\tfrac{1}{2} \\ ab + cd &= \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \\ a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 &= (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \\ a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 &= a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 \\ 2abcd &= a^2d^2 + c^2b^2 \\ a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2 &= 0 \\ (ad - cb)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $ad - cb = 0$, como

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & x_2 - x_1 & c & = & y_2 - y_1 \\ b & = & x_3 - x_2 & c & = & y_3 - y_2 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} ad & = & cb \\ (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) & = & (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \end{array}$$

Definición 20 *Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, diremos que $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ son colineales si y sólo si*

$$dist(P_1, P_3) = dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3) \quad \text{o bien} \quad (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)$$

Ejemplo 57 *Encuentre el conjunto de todos los puntos colineales a $P = (13, 3)$ y $Q = (9, 15)$.*

Solución: Sean P, Q y R colineales luego

$$dist(P, Q) = dist(P, R) + dist(R, Q)$$

equivalentemente

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)$$

Como $P = (13, 3) = (x_1, y_1); Q = (9, 15) = (x_3, y_3)$ y $R = (x_2, y_2) = (x, y)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} (x - 13)(15 - y) & = & (y - 3)(9 - x) \\ 15x - xy - 195 + 13y & = & 9y - xy - 27 + 3x \\ 12x + 4y & = & 168 \\ y & = & \dfrac{168 - 12x}{4} \\ y & = & 42 - 3x \end{array}$$

Por lo tanto $R \in \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = 42 - 3x\}$. □

2.3. Ecuación de la Recta

La geometría euclidiana nos enseña que dados dos puntos distintos, existe una única recta que contiene a los puntos. Así tenemos que una recta es el conjunto de puntos colineales a dos puntos dados.

Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, luego la recta que pasa por los $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$L_{P_1P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\}$$

Llamaremos línea recta o simplemente recta a la figura geométrica que resulta al graficar los puntos de este conjunto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Observación: Para una mayor comodidad de escritura, al conjunto que forma una recta

$$L_{P_1P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\}$$

lo denotaremos por su ecuación, es decir,

$$L_{P_1P_2} : \ (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)$$

Ejemplo 58 *Hallar las ecuaciones de la recta l que pasan por los puntos $(5, -9)$ y $(1, 3)$.*

Solución: Sabemos que $(5, -9)$ y $(1, 6) \in l$, donde $(5, -9) = (x_1, y_1)$ y $(1, 6) = (x_2, y_2)$ tenemos

$$\begin{aligned}
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (1 - 5)(y - 6) = (6 - (-9))(x - 1\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -4(y - 6) = 15(x - 1)\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -4y + 24 = 15x - 15\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 15x + 4y - 39 = 0\}.
\end{aligned}$$

Definición 21 *Sean $P_1, P_2 \in l$ distintos, se define la pendiente de la recta l en los siguientes casos*

1. *Si $x_2 = x_1$ diremos que la pendiente es infinita, y escribiremos $m = \infty$ entonces la recta l es*

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ x = x_1\} \quad o \quad l : x = x_1$$

2. *Si $x_2 \neq x_1$, se define la pendiente*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

entonces la recta l es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ y = mx + b\} \quad o \quad l : y = mx + b$$

con

$$b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

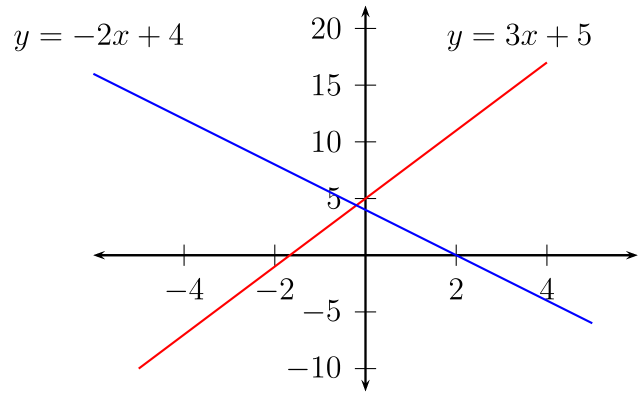
Observación: Un caso particular es cuando la pendiente de l toma el valor 0, es decir $m = 0$ entonces la ecuación de la recta l es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = b\} \quad \text{o} \quad l : y = b$$

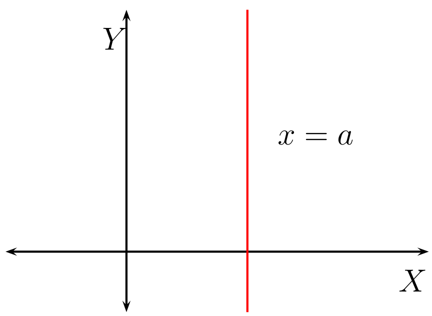
Gráficamente se puede distinguir dos situaciones en la recta dependiendo del valor de la pendiente, es decir, cuando la pendiente es positiva tenemos que es creciente y cuando es negativa es decreciente

$$m > 0 \ \text{ o } \ m < 0$$

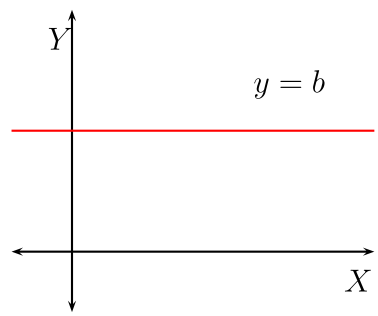
este comportamiento lo observaremos mediante dos ejemplos



En los otros caso, la gráfica de las rectas cuando $m = \infty$ y $m = 0$ es:



pendiente infinita, vertical



pendiente igual a 0, horizontal

Ejemplo 59 *Sean $A = (6, 11)$ y $B = (13, 4) \in \mathbb{R}^2$ dos punto que pertenece a la recta l. Calcule la pendiente de la recta l.*

Solución: Sean $A = (x_1, y_1) = (6, 11)$ y $B = (x_2, y_2) = (13, 4)$ reemplazando en la formula de la pendiente tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 11}{13 - 6} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta l es -1. $\square$

Ejemplo 60 *Calcule las pendientes de las rectas que pasan por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A = (5, 7)$, $B = (12, 3)$ y que pasan por un punto que es colineales a los puntos de $C = (16, 14)$ y $D = (8, 10)$.*

Solución: Sea $A = (5, 7)$ y $B = (12, 3)$, luego el punto medio de $\overline{AB}$ esta dado por:

$$Q = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{5 + 12}{2}, \frac{7 + 3}{2}\right) = \left(\frac{17}{2}, \frac{10}{2}\right) = \left(\frac{17}{2}, 5\right)$$

Consideremos los puntos colineales a $C = (16, 14)$ y $D = (8, 10)$ que denotaremos como $P = (a, b)$. Reemplazando tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) & = & (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \\
(a - 16)(10 - b) & = & (b - 14)(8 - a) \\
10a - ab - 160 + 16b & = & 8b - ab - 112 + 14a \\
4a - 8b & = & -48 \\
a & = & \frac{8b-48}{4} \\
a & = & 2b - 12
\end{array}$$

Reemplazando en $a = 2b - 12$ en el punto $P = (a, b)$ tenemos que $P = (2b - 12, b)$
Luego si $Q = \left(\frac{17}{2}, 5\right) = (x_1, y_1)$ y $P = (2b - 12, b) = (x_2, y_2)$ su pendiente es

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{b - 5}{2b - 12 - \frac{17}{2}}; \quad b \neq \frac{41}{4} \\
&= \frac{2b - 10}{4b - 41}
\end{aligned}$$

Por lo tanto todas las rectas que pasan por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y por los posibles puntos colineales de C y D tienen como pendiente

$$m = \frac{2b - 10}{4b - 41} \text{ o } m = \infty$$

El problema esta representado por la gráfica 2.3, es decir,

Sean $Q, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9 \in \mathbb{R}^2$ donde $Q = (\frac{17}{2}, 5)$ es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ algunos de los puntos colineales a C y D tenemos

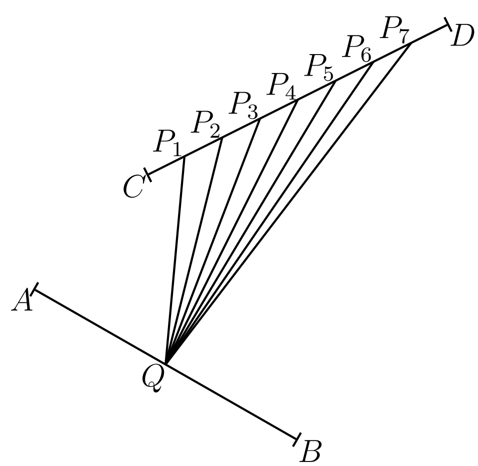


Figura 2.3:

Finalmente sus ecuaciones están dadas por:

$$l_b : (y - \frac{17}{2}) = \frac{2b - 10}{4b - 41}(x - 5) \quad \text{o bien } x = \frac{17}{2}$$

donde $P_b = (2b - 12, b)$ punto colineal de $\overline{CD}$, con $b \neq 17/2$. □

A continuación daremos algunas indicaciones para determinar la ecuación de la recta dependiendo de los datos proporcionados por el problema.

Primer Caso: Se conoce un punto de la recta y su pendiente.

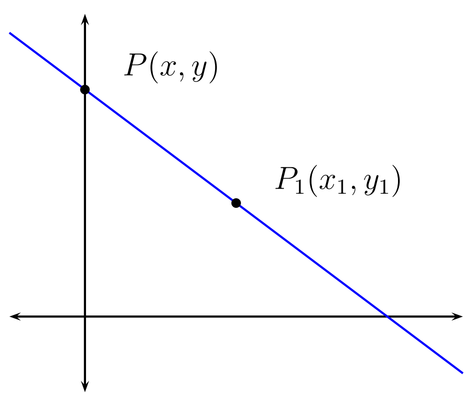
La ecuación de la recta l queda totalmente determinada con un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ y su pendiente m.

a) Si la pendiente $m = \infty$ entonces la recta es:

$$l : x = x_1$$

b) Si la pendiente $m \in \mathbb{R}$, luego sea $P = (x, y) \in l$, otro punto de la recta, así tenemos que

$$\begin{aligned} m &= \frac{y - y_1}{x - x_1} \\ m(x - x_1) &= y - y_1 \end{aligned}$$



Propiedad 33 *Sean $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $m \in \mathbb{R}$ donde m representa la pendiente de la recta l entonces la ecuación de la recta está dada por:*

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{2.4}$$

Ejemplo 61 *Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (11, 3)$ y su pendiente es $m = 13$.*

Solución: Como la recta pasa por el punto $A = (x_1, y_1) = (11, 3)$ y su pendiente es $m = 13$, reemplazando en la ecuación 2.4 obtenida anteriormente tenemos

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 3 &= 13(x - 11). \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta esta dada por

$$y = 13x - 140$$

□

Segundo Caso: Se conocen dos puntos de la recta.

Sabemos que la ecuación de la recta l queda totalmente determinada por dos puntos. Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
a) Si $x_1 \neq x_2$, reemplazando en la definición de pendiente (21) obtenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

para luego reemplazar en (2.4), y obtenemos

$$l : y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si $x_1 = x_2$ entonces la ecuación es

$$l : x = x_1.$$

Propiedad 34 *Sean $P_2 = (x_2, y_2), P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ con $x_1 \neq x_2$, entonces la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados es:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad con \ \ x_1 \neq x_2 \tag{2.5}$$

Ejemplo 62 *Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto* $(1, 9)$ *y por el punto* $(5, 7)$.

Solución: Ya que la recta pasa por los puntos $A = (x_1, y_1) = (1, 9)$ y $B = (x_2, y_2) = (5, 7)$.
Reemplazando A y B en la definición de pendiente tenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 9}{5 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Y la pendiente en ecuación obtenida anteriormente tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 9 &= -\frac{1}{2}(x - 1) \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2} \end{aligned}$$

□

Observación: Para encontrar la ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos el orden en que se consideren los puntos, no afecta la expresión o ecuación.

Ejemplo 63 *La recta l interseca al eje Y en el punto* $(0, 6)$ *y pasa por el punto* $(5, 8)$. *Encuentre la ecuación de la recta l*

Solución: Consideremos los puntos $A = (x_1, y_1) = (0, 6)$ y el punto $B = (x_2, y_2) = (5, 8)$, luego calculemos su pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 6}{5 - 0} = \frac{2}{5}.$$

Luego reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 6 &= \frac{2}{5}(x - 0) \end{aligned}$$

Despejando y obtenemos la ecuación pedida.

$$y = \frac{2}{5}x + 6.$$

□

Observación: La ecuación de la recta se puede escribir de varias maneras y de acuerdo a esta escritura es que recibe distintos nombres

Definición 22 *Sean $A, B, C, a, b, m \in \mathbb{R}$ y l una recta, entonces*

1. *Se dice que la recta*
$$l : Ax + By + C = 0. \tag{2.6}$$
esta definida por la ecuación general *o que $Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de la recta.*

2. *Se dice que la recta*
$$l : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$
esta definida por la ecuación simétrica *o que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es la ecuación simétrica de la recta.*

3. *Se dice que la recta esta definida por la* ecuación pendiente-ordenada o reducida *cuando la ecuación tiene la siguiente forma*
$$l : y = mx + b.$$

Ejemplo 64 *Considere la ecuación de la recta*

$$l : y - 7 = \frac{10}{3}(x - 4).$$

Encuentre la ecuación general, ecuación simétrica y la pendiente-ordenada.

Solución: Sea $y - 7 = \frac{10}{3}(x - 4)$

(i) Consideremos la ecuación de la recta

$$\begin{aligned} y-7 &= \frac{10}{3}\,(x-4) \\ y-7 &= \frac{10}{3}\,x-\frac{40}{3} \quad / \cdot 3 \\ 3y-21 &= 10x-40 \\ 10x-3y-19 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación general de la recta es:

$$10x-3y-19=0$$

(ii) Tomemos la ecuación general $10x-3y-19=0$

$$\begin{aligned} 10x-3y-19 &= 0 \\ 10x-3y &= 19 \quad / \cdot \frac{1}{19} \\ \frac{10}{19}x-\frac{3}{19}y &= 1 \\ \frac{x}{\frac{19}{10}}-\frac{y}{\frac{19}{3}} &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación simétrica de la recta es:

$$\frac{x}{\frac{19}{10}}+\frac{y}{-\frac{19}{3}}=1$$

(iii) Consideremos la ecuación general $10x-3y-19=0$

$$\begin{aligned} 10x-3y-19 &= 0 \\ 3y &= 10x-19 \quad / \cdot \frac{1}{3} \\ y &= \frac{10}{3}\,x-\frac{19}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación pendiente-punto es:

$$y=\frac{10}{3}\,x-\frac{19}{3}$$

□

Ejemplo 65 *Si l_1 es una recta que pasa por los puntos $(7,11),(3,4)$ y l_2 es una recta de pendiente 13 y pasa por $(8,5)$.*

Hallar la intersección de las rectas l_1 y l_2.

Solución: Sabemos que $(7,11),(3,4) \in l_1$, luego tenemos que

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\
y - 11 &= \frac{4-11}{3-7}(x-7) \\
y - \frac{7}{4}x &= 11 - \frac{49}{4} \\
y - \frac{7}{4}x &= -\frac{5}{4} \quad / \cdot 4 \\
4y - 7x + 5 &= 0
\end{aligned}$$

Así tenemos la ecuación de la recta $l_1 : 4y - 7x + 5 = 0$.

Para l_2 tenemos que pasa por $(8,5) = (x_1, y_1) \in l_2$ y su pendiente es 13 por ecuación 2.3 tenemos

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 5 &= 13(x - 8) \\
y - 5 &= 13x - 104 \\
y - 13x + 99 &= 0
\end{aligned}$$

Sea P es el punto de intersección de l_1 y l_2, es decir, $l_1 \cap l_2 = \{P\}$, luego satisface las ecuaciones anteriores, por lo tanto tenemos que

$$\left.\begin{aligned}
4y - 7x + 5 &= 0 \\
y - 13x + 99 &= 0
\end{aligned}\right|$$

despejando y de la segunda ecuación obtenemos

$$y = 13x - 99$$

y reemplazando en la primera tenemos

$$\begin{aligned}
4 \cdot (13x - 99) - 7x + 5 &= 0 \\
52x - 396 - 7x + 5 &= 0 \\
45x &= 391 \\
x &= \frac{391}{45}
\end{aligned}$$

Reemplazamos $x = \frac{391}{45}$ en $y = 13x - 99$ entonces

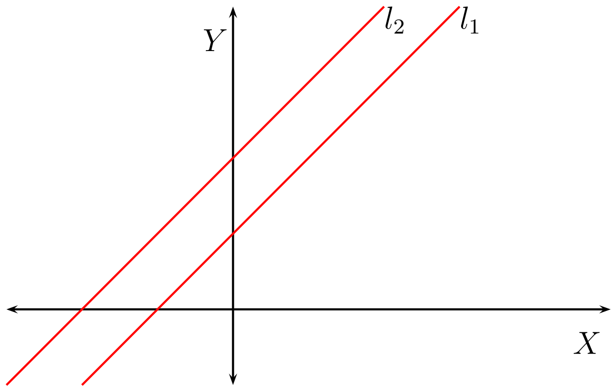
$$y = 13 \cdot \left(\frac{391}{45}\right) - 99 = \frac{5083}{45} - 99 = \frac{628}{45}$$

Luego el punto intersección es $P = (\frac{391}{45}, \frac{628}{45})$ $\square$

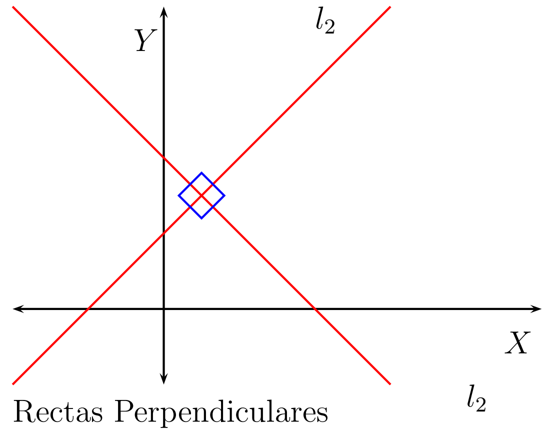
2.3.1. Rectas Paralelas o Perpendiculares

Sean l_1, l_2 dos rectas de la forma

$$\begin{array}{rcl} l_1 : y &=& m_1x + b_1 \\ l_2 : y &=& m_2x + b_2 \end{array} \quad o \quad \begin{array}{rcl} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 &=& 0 \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 &=& 0 \end{array}$$



Rectas Paralelas



Rectas Perpendiculares

Rectas Paralelas

Definición 23 *Diremos que dos rectas l_1, l_2 son paralelas o $l_1//l_2$ si estas no se intersecan en ningún punto o bien son iguales.*

Propiedad 35 *Las rectas l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si*

$$m_1 = m_2 \quad o \quad A_1B_2 = A_2B_2$$

es decir, $l_1//l_2$ si y sólo si las pendientes son iguales.

Ejemplo 66 *Sean las rectas $l_1 : 3y + 4x - 15 = 0$ y $l_2 : 9y + 12x + 21 = 0$, verifique si $l_1//l_2$.*

Solución: Como $l_1 : 3y + 4x - 15 = 0$ y $l_2 : 9y + 12x + 21 = 0$ tenemos

$$\begin{array}{rl} l_1 : & 3y + 4x - 15 = 0 \\ & 3y = -4x + 15 \\ & y = -\dfrac{4}{3}\, x + 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l_2 : & 9y + 12x + 21 = 0 \\ & 9y = -12x + 21 \\ & y = -\dfrac{4}{3}\, x + \dfrac{7}{3} \end{array}$$

Luego

$$m_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, las rectas l_1 y l_2 son rectas paralelas, es decir, $l_1//l_2$ □

Rectas Perpendiculares

Definición 24 *Diremos que dos rectas son perpendiculares si y sólo si se intersecan en un punto formando un ángulo de* $90°$.

Propiedad 36 *Las rectas* l_1 *y* l_2 *son perpendiculares si y sólo si*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

es decir, $l_1 \perp l_2$ *si y sólo si la multiplicación de sus pendientes es igual a* -1 *o una es horizontal y la otra vertical.*

Ejemplo 67 *Sean las rectas* $l_1 : 2y - 7x - 24 = 0$ *y* $l_2 : 28y + 8x + 13 = 0$, *verifique si* $l_1 \perp l_2$.

Solución: Como $l_1 : 2y - 7x - 24 = 0$ y $l_2 : 28y + 8x + 13 = 0$ tenemos

$$\begin{array}{rlcrl} l_1: & 2y - 7x - 24 = 0 & \qquad & l_2: & 28y + 8x + 13 = 0 \\ & 2y = 7x + 24 & & & 28y = -8x - 13 \\ & y = \dfrac{7}{2}\,x + 12 & & & y = -\dfrac{2}{7}\,x - \dfrac{13}{28} \end{array}$$

Por otro lado

Luego

$$m_1 = \frac{7}{2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{2}{7}$$

donde

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{7}{2} \cdot \frac{-2}{7} = -1$$

Por lo tanto podemos concluir que las rectas l_1 y l_2 son rectas perpendiculares, es decir, $l_1 \perp l_2$. □

Definición 25 *Diremos que dos rectas son* coincidentes *si y sólo si las rectas son iguales.*

Propiedad 37 *Las rectas* l_1 *y* l_2 *son coincidente si y sólo si*

$$m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2 \qquad o \qquad C_1B_2 = C_2B_1 \wedge A_1B_2 = A_2B_1 \wedge A_1C_2 = A_2C_1$$

Ejemplo 68 *Sean* $A = (2, 5), B = (7, 3)$ *y* $l_1, l_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ *rectas tales que* $A, B \in l_2$ *y*

$$l_1 : kx + (k + 3)y + 5 = 0.$$

Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ *para que:*

1. $l_1 \perp l_2$.

2. $l_1 // \, l_2$.

Solución: Calculemos la pendiente de l_2 con $A = (x_1, y_1) = (2, 5)$ y $B = (x_2, y_2) = (7, 3)$ entonces

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{7-5} = \frac{1}{2}$$

Entonces tomando el punto $A = (2, 5)$ y la pendiente $m_2 = \frac{1}{2}$, la ecuación de la recta l_2 esta dada por:

$$\begin{aligned} y - 5 &= \frac{1}{2}(x-2) \\ y - 5 &= \frac{x}{2} - 1 \\ y &= \frac{x}{2} + 4 \end{aligned}$$

Luego la pendiente de l_1 la podemos obtener de la escritura de la recta:

$$\begin{aligned} kx + (k+3)y + 5 &= 0 \\ (k+3)y &= -kx - 5 \\ y &= \frac{-k}{k+3}x - \frac{5}{k+3}; \end{aligned}$$

Observación: El valor de k no puede ser igual a -3 en cuyo caso la pendiente es infinito y no serían paralela ni perpendiculares.

Por lo tanto la pendiente de l_1 es

$$m_1 = \frac{-k}{k+3}$$

1. Para que $l_1 \perp l_2$ necesitamos que $m_{l_1} \cdot m_{l_2} = -1$ luego tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{-k}{k+3} &= -1 \\ -k &= -2(k+3) \quad / \cdot (-1) \\ k &= 2k + 6 \\ k &= -6. \end{aligned}$$

   Reemplazando k en la ecuación obtenemos

$$l_1 : y = -\frac{6}{3}x + \frac{5}{3} \ \text{ y } \ l_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$$

   son perpendiculares.

2. Para que $l_1 // \, l_2$ necesitamos que $m_{l_1} = m_{l_2}$

$$\begin{aligned} \frac{-k}{k+3} &= \frac{1}{2} \\ -2k &= k + 3 \\ -3k &= 3 \\ k &= -1 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de k en la ecuación de la recta l_1 tenemos que:

$$l_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \text{ y } l_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$$

son paralelas. □

Propiedad 38 *Dada la recta*

$$l : Ax + By = C$$

y el punto $P = (x_1, y_1)$ *entonces tenemos*

1. *La ecuación de la recta* l_1 *perpendicular a* l *que pasa por* P *es*

$$l_1 : \quad B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

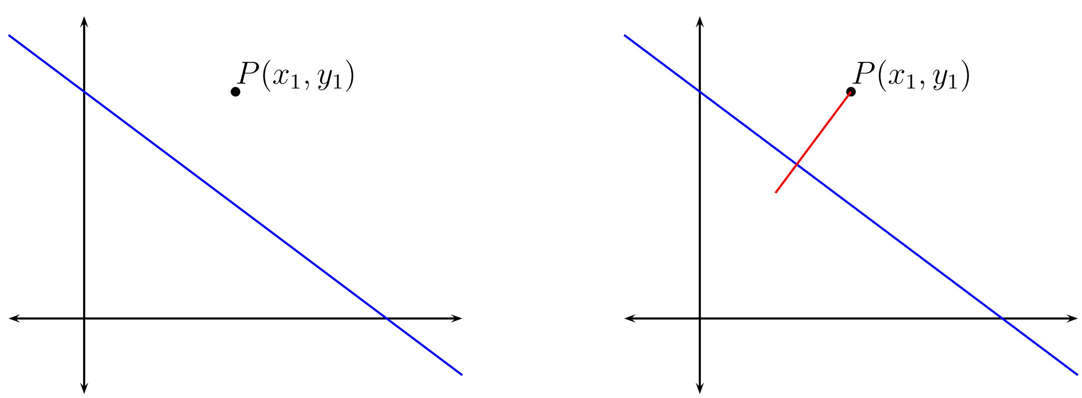
2. *La ecuación de la recta* l_2 *paralela a* l *que pasa por* P *es*

$$l_2 : \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

2.3.2. Distancia de un Punto a una Recta

La distancia de un punto a una recta, es la distancia más corta del punto a cualquier de los puntos que pertenezcan a la recta, note que este punto corresponde a un punto cuya recta es perpendicular a la recta original y pasa por el punto dado, ya que los otros formarían un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud mayor.

Sea l una recta de ecuación $Ax + By = C$ y $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$.



Sean l_1 perpendicular a l y $P \in l_1$, luego tenemos que

$$l_1 : B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

Calculemos $Q = (x, y)$ el punto de intersección de l con l_1

$$\begin{array}{rcl|} Ax + By & = & C \\ Bx - Ay & = & Bx_1 - Ay_1 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicando la primera ecuación por A, la segunda por B y sumamos obtenemos

$$\begin{aligned} A(Ax+By)+B(Bx-Ay) &= AC+B(Bx_1-Ay_1) \\ (A^2+B^2)x &= AC+B^2x_1-BAy_1 \\ x &= \frac{AC+B^2x_1-BAy_1}{A^2+B^2} \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos

$$y=\frac{BC+A^2y_1-BAx_1}{A^2+B^2}$$

Luego calculemos $dist(P,Q)$ donde $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x,y)$

$$dist(Q,P)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

Calculemos primeros $(x-x_1)^2$

$$\begin{aligned} (x-x_1)^2 &= \left(\frac{AC+B^2x_1-BAy_1}{A^2+B^2}-x_1\right)^2 \\ &= \left(\frac{AC+B^2x_1-BAy_1-A^2x_1-B^2x_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{AC-BAy_1-A^2x_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &= A^2\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \end{aligned}$$

Calculemos ahora $(y-y_1)^2$

$$\begin{aligned} (y-y_1)^2 &= \left(\frac{BC+A^2y_1-BAx_1}{A^2+B^2}-y_1\right)^2 \\ &= \left(\frac{BC+A^2y_1-BAx_1-A^2y_1-B^2y_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{BC-BAx_1-B^2y_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &= B^2\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} (dist(Q,P))^2 &= (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \\ &= A^2\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2}+B^2\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \\ &= (A^2+B^2)\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \\ &= \frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{A^2+B^2} \end{aligned}$$

De lo cual

$$dist(Q,P) = \sqrt{\frac{(C - By_1 - Ax_1)^2}{A^2 + B^2}}$$

Propiedad 39 *Sea $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y la recta cuya ecuación es*

$$l : Ax + By = C \quad o \quad l : y = mx + b$$

entonces la distancia de un punto P a la recta l esta dada por:

$$dist(P,l) = \frac{\mid Ax_1 + By_1 - C \mid}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{2.7}$$

o por

$$dist(P,l) = \frac{\mid y_1 - b - x_1 m \mid}{\sqrt{1 + m^2}} \tag{2.8}$$

Ejemplo 69 *Dado los puntos $A = (-1, 4)$, $B = (1, 2)$ y $C = (3, -2)$. Determine el área del triángulo ABC (con vértices en los puntos A, B, C).*

Solución: La recta que pasa por A, B es

$$l_{AB} : y - 2 = \frac{4 - 2}{-1 - 1}(x - 1)$$

es decir $l_{AB} : y + x = 3$.

Luego el área del triángulo es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \cdot dist(A,B) \cdot dist(C, l_{AB}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \cdot \frac{|-2 + 3 - 3|}{\sqrt{1 + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Luego el área del triángulo ABC es 2. □

2.3.3. Ejercicios Propuestos

1. Demuestre que los puntos $A = (-3, 1)$, $B = (5, 3)$, $C = (3, 9)$ y $D = (-5, 7)$ son los vértices de un paralelogramo.

2. Dados los puntos $A = (-4, 1)$ y $B = (1, -1)$, determine todos los puntos C sobre la recta de ecuación $y = x + 4$ para los cuales el triángulo de vértices ABC tenga área igual a 1.

   [*Resp.* $C = (3, 7)$ *o* $C = (-3, 1)$]

3. Considere los puntos del plano $A = (1, 2)$ y $B = (3, 5)$ y sea $\overline{AB}$ el segmento que los une. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es perpendicular a la recta que une A con B.

   [*Resp.* $4x + 6y - 29 = 0$]

4. Encuentre la ecuación de la altura del triángulo ABC donde $\overline{AB}$ representa la base y $A = (-1, 4)$, $B = (1, 2)$ y $C = (3, -2)$.

   [*Resp.* $y - x - 3 = 0$]

5. Sea la ecuación de la recta $L : (k + 1)y - kx - 3 = 0$, encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ para los siguientes casos:

   a) L pasa por el punto $(-1, 2)$. [*Resp.* $k = \frac{1}{3}$]
   b) L sea horizontal.[*Resp.* $k = 0$]
   c) L sea paralela a la recta de ecuación $3y + x - 2 = 0$. [*Resp.* $k = \frac{-1}{4}$]
   d) L sea perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$. [*Resp.* $k = \frac{-3}{5}$]
   e) L sea vertical. [*Resp.* $k = -1$]

6. Sean l_1 y l_2 las rectas cuyas ecuaciones son $x+2y = 3$ y $-2x+y = 4$, respectivamente. Determine la ecuación de la recta l que pasa por el punto de intersección entre l_1 y l_2 y que es perpendicular a la recta $l_3 : 3x - y - 1 = 0$.

   [*Resp.* $l : x + 3y - 5 = 0$]

7. Determinar el área del triángulo de vértices $(-2, -1), (1, 4)$ y $(3, -3)$.

   [*Resp.* $\frac{31}{2}$]

8. Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P = (-2, 3)$ y es perpendicular a la recta $l : 3x - 2y + 5 = 0$.

   [*Resp.* $2x + 3y - 5 = 0$]

9. Dadas las rectas $l_1 : 2x - 3y - 2 = 0$, $l_2 : 3x - 2y + 1 = 0$ y $l_3 : x + 4y - 3 = 0$. Determinar la distancia del punto de intersección de l_1 con l_2 a la recta l_3.

   [*Resp.* $\approx 2{,}6$]

10. Determine la recta l que esta a una distancia $\sqrt{2}$ del punto $P = (1, -2)$ e interseca perpendicularmente a la $l_1 : 3x - y + 1 = 0$.

    [*Resp.* $x + 3y + (5 - 2\sqrt{5}) = 0$ *o* $x + 3y + (5 + 2\sqrt{5}) = 0$]

11. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.

    [*Resp.* $4x + y - 10 = 0$]

12. Sean $A = (-2, 1)$, $B = (4, 7)$ y $C = (6, -3)$ los cuales forman el triángulo ABC, determine su ortocentro (ortocentro: punto de intersección de las alturas del triángulo ABC).

    [*Resp.* $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$]

13. Determine el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax - By + 4 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $(-3, 1)$ y $(1, 6)$.

    [*Resp.* $A = \frac{20}{19}, B = \frac{16}{19}$]

14. Encuentre los valores de k para que la reta $4x + 5y + k = 0$, forme un triángulo rectángulo con los ejes coordenados (eje X y eje Y), donde su área sea igual a $\frac{5}{2}$.

    [*Resp.* $k = 10$ *o* $k = -10$]

15. Determine los valores para a y b de tal manera que las rectas $ax + (2 - b)y - 23 = 0$ y $(a - 1)x + by + 15 = 0$ pasen por el punto $(2, -3)$.

    [*Resp.* $a = 4, b = 7$]

16. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje Y.

    [*Resp.* $x - 2y + 8 = 0$ *o* $13x - 6y + 24 = 0$]

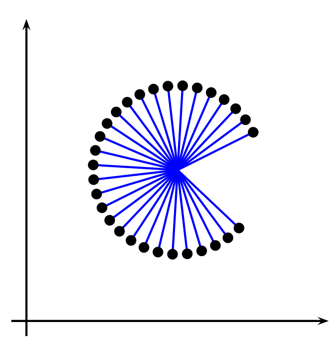
17. Calcule la distancia entre las rectas

    $$L_1 : 2x + 3y - 6 = 0 \quad y \quad L_2 : 2x + 3y + 13 = 0$$

    [*Resp.* $\frac{19}{\sqrt{13}}$]

2.4. La Circunferencia

Definición 26 *La circunferencia es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a una misma distancia (radio) de otro punto fijo (centro) en el plano.*



Denotaremos el centro de la circunferencia por $Q = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ y al radio por $r \in \mathbb{R}^+$ ya que representa la longitud entre dos puntos.

Sea $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Luego la distancia entre P y Q esta dada por

$$dist(Q, P) = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}.$$

simplificando la expresión

$$\begin{array}{rcll} dist(Q, P) & = & r & \\ \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} & = & r & /()^2 \\ (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 & = & r^2 & \end{array}$$

lo cual cumple cualquier punto de la circunferencia. Así obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_r(Q) & = & \{T \in \mathbb{R}^2 \quad | \ dist(Q, T) = r\} \\ \mathcal{C}_r(Q) & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \ (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\} \end{array}$$

Lo que permite entregar la siguiente definición.

Propiedad 40 *Sean $Q = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}^+$, luego la circunferencia de centro (h, k) y radio r es:*

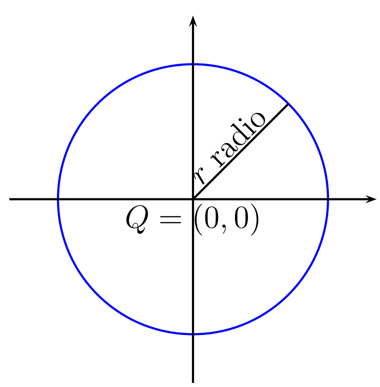
$$\mathcal{C}_r(Q) \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

o la ecuación de la circunferencia esta dada por $\mathcal{C}_r(Q) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Observación: Al igual que el ejemplo 55 la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen, $(h, k) = (0, 0)$, y radio r esta dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Cuya gráfica es:



Observación: Sean $T \in \mathcal{C}_r(Q), Q \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$ donde $T = (x, y)$, $Q = (h, k)$ es el centro y r que es el radio entonces la ecuación de la circunferencia al igual que la ecuación 2.9 es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 \quad = \quad r^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\
x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + k^2 + h^2 - r^2 &= 0
\end{aligned}$$

Definamos las siguientes variables

$$A = -2h, \quad B = -2k, \quad C = k^2 + h^2 - r^2.$$

luego reemplazando obtenemos

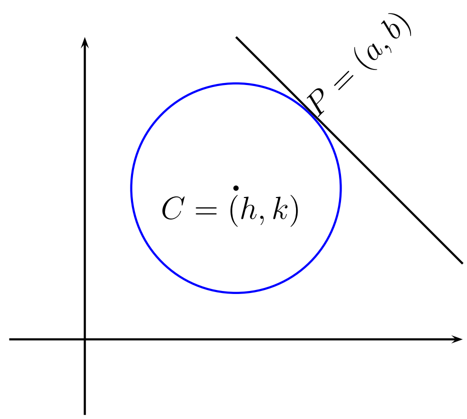
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

llama ecuación general de la circunferencia.

2.4.1. Tangencia de una recta a la circunferencia

Una recta l es tangente a una circunferencia $\mathcal{C}_r$ en el punto $P \in l \cap \mathcal{C}_r$, si la recta es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto P.

Sean $Q = (h, k)$ el centro de la circunferencia, $P \in \mathbb{R}^2$ el punto de tangencia entre la recta l y la circunferencia. Por lo tanto l_{PQ} es perpendicular a l, lo que gráficamente tenemos dado por:



Ejemplo 70 *Encuentre la recta tangencia a la circunferencia* $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ *en el punto* $(4, 1)$.

Solución: Notemos que el punto pertenece a la circunferencia $3^2 + 4^2 = 25$, además el centro de la circunferencia es $(1, -3)$.

La recta que une el centro $(1, -3)$ y el punto P tiene pendiente

$$m = \frac{-3-1}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Luego la recta perpendicular tiene pendiente $m' = -\frac{3}{4}$.

Así tenemos que

$$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

Por lo tanto la recta tangente en el punto $(4, 1)$ es

$$3x + 4y = 16.$$

$\square$

Propiedad 41 *Sean $T = (x_1, y_1) \in \mathcal{C}_r(Q) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ entonces la ecuación de recta tangente a la circunferencia es*

$$(y_1 - k)(y - y_1) = (x_1 - h)(x - x_1).$$

Ejemplo 71 *Encuentre P el punto de tangencia entre la circunferencia de radio $\sqrt{17}$ y centro $(3, 6)$, con la recta l de pendiente $m = \frac{1}{4}$ y que pasa por el punto $(12, 4)$.*

Solución: Como el centro de la circunferencia es $(3, 6)$ y su radio es $\sqrt{17}$ tenemos que la ecuación de la circunferencia es :

$$(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 17$$

Ya que la recta tiene pendiente $m = -\frac{1}{4}$ y el punto $(12, 4)$ pertenece a esta, entonces su ecuación es :

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - a) \\ y - 4 &= \frac{1}{4}(x - 12) \\ 4y - x &= 4 \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 &= 17 \\ 4y - x &= 4 \end{aligned}\right|$$

Despejando tenemos que $x = 4y - 4$, reemplazando obtenemos

$$(4y - 4 - 3)^2 + (y - 6)^2 = 17$$

Simplificando se obtiene que

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

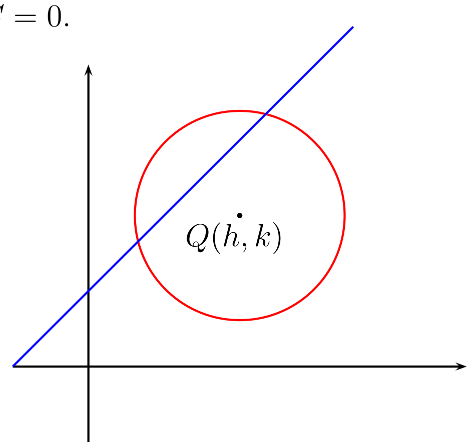
De lo cual obtenemos $y = 2$, de ello se obtiene que $x = 8 - 4 = 4$.

Por lo tanto el punto de intersección es $(4, 2)$, el cual es fácil verificar que pertenece a la circunferencia $(4 - 3)^2 + (2 - 6)^2 = 17$ y a la recta. Luego el punto pedido es $P = (4, 2)$. $\square$

2.4.2. Intersección entre una recta y una circunferencia

La intersección de una recta con una circunferencia da como resultado un conjunto que a lo más tiene dos puntos que se encuentran en el plano cartesiano, los cuales se pueden obtener a través de un sistema ecuaciones, es decir, un punto que pertenece a la recta y a la circunferencia satisfacen ambas ecuaciones.

Sean $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ una circunferencia de radio r y centro $Q=(h,k)$ y la recta de ecuación $l: Ax+By+C=0$.



Sea $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ un punto de la intersección de la recta con la circunferencia:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2 \quad (2.9)$$
$$Ax+By+C=0 \quad (2.10)$$

Veremos sólo el caso $B\neq 0$, despejando y en la ecuación (2.10) tenemos

$$y=m_1x+b_1$$

Luego reemplazando en la ecuación (2.9) obtenemos

$$(x-h)^2+([m_1x+b_1]-k)^2=r^2$$

$$x^2-2xh+h^2+[m_1x+b_1]^2-2k[m_1x+b_1]+k^2=r^2$$

$$x^2-2xh+h^2+m_1^2x^2+2m_1b_1x+b_1^2-2km_1x-2km_1b_1+k^2=r^2$$

$$x^2(1+m_1^2)+x(-2h+2m_1b_1-2km_1)+(h^2+b_1^2-2km_1b_1+k^2-r^2)=0$$

Sean

$$\begin{array}{rcl} a &=& 1+m_1^2 \\ b &=& -2h-2m_1^2x_1+2m_1y_1-2km_1 \\ c &=& h^2+m_1^2x_1^2-2m_1y_1x_1+y_1^2+2km_1x_1-2m_1y_1+k^2-r^2 \end{array}$$

reemplazando obtenemos

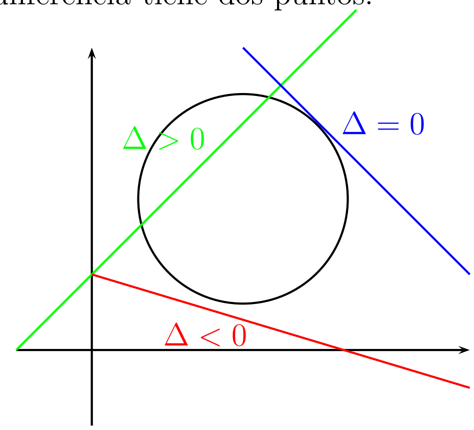
$$ax^2+bx+c=0$$

Luego consideremos el discriminante de la ecuación que denotaremos por Δ.

1. Si $\Delta<0$ se tiene que la ecuación tiene solución vacía en los reales, es decir, la intersección de la recta con la circunferencia es vacía.

2. Si $\Delta = 0$ se tiene que la ecuación tiene una única solución real, es decir, la intersección de la recta con la circunferencia es único el punto, lo cual indica que la recta l es tangente a la circunferencia.

3. Si $\Delta > 0$ se tiene que la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, la intersección de la recta con la circunferencia tiene dos puntos.



Ejemplo 72 *Dada la circunferencia de ecuación* $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Determine en cuales puntos de la circunferencia pertenecen a la recta en los siguientes casos.

1. $l_1 : 3\sqrt{3} + 6 - x = \sqrt{3}y$
2. $l_2 : x = y$
3. $l_3 : x - y = -5$

Solución: Consideremos la circunferencia $(x-2)^2+(y-3)^2 = 4$ e intersectemos con la recta en cada caso, lugo se obtiene un sistema de ecuaciones, en cada caso dado por:

1.
$$\left.\begin{array}{rcl} (x-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ 3\sqrt{3} + 6 - x & = & \sqrt{3}y \end{array}\right|$$

Despejando

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3}y & = & 3\sqrt{3} + 6 - x \\ y & = & \dfrac{3\sqrt{3} + 6 - x}{\sqrt{3}} \\ y & = & 3 + \dfrac{6 - x}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Reemplazando la variable obtenida, en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{aligned}
(x-2)^2+(y-3)^2 &= 4\\
(x-2)^2+\left(3+\frac{6-x}{\sqrt{3}}-3\right)^2 &= 4\\
(x-2)^2+\left(\frac{6-x}{\sqrt{3}}\right)^2 &= 4\\
x^2-4x+4+\frac{x^2-12x+36}{3} &= 4 \quad /\cdot 3\\
3x^2-12x+x^2-12x+36 &= 0\\
4x^2-24x+36 &= 0 \quad /\cdot \frac{1}{4}\\
x^2-6x+9 &= 0
\end{aligned}$$

Luego el discriminante $\Delta = (6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 0$, despejando x tenemos

$$x = \frac{6\pm\sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Reemplazando en la recta, encontremos el valor de y

$$y = 3+\frac{6-x}{\sqrt{3}} = 3+\frac{6-3}{\sqrt{3}} = 3+\frac{3}{\sqrt{3}} = 3+\frac{3\sqrt{3}}{3} = 3+\sqrt{3}$$

Por lo tanto el punto de intersección es

$$p = (3, 3+\sqrt{3})$$

2. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
(x-2)^2+(y-3)^2 &= 4\\
x &= y
\end{aligned}\right|$$

Reemplazando la variable y ecuación de la recta, en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{aligned}
(x-2)^2+(y-3)^2 &= 4\\
(x-2)^2+(x-3)^2 &= 4\\
x^2-4x+4+x^2-6x+9-4 &= 0\\
2x^2-10x+9 &= 0
\end{aligned}$$

Luego el discriminante $\Delta = (10)^2 - 4\cdot 2\cdot 9 = 28$, luego resolviendo tenemos

$$x = \frac{10\pm\sqrt{28}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$

Por lo tanto

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Reemplazando en la ecuación de la recta, encontremos y

a) Si $x = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ entonces $y = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

b) Si $x = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ entonces $y = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

Por lo tanto los puntos de intersección son

$$p_1 = \left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \quad y \quad p_2 = \left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$

3. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl|} (x-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ x - y & = & -5 \\ \hline \end{array}$$

Despejando, obtenemos

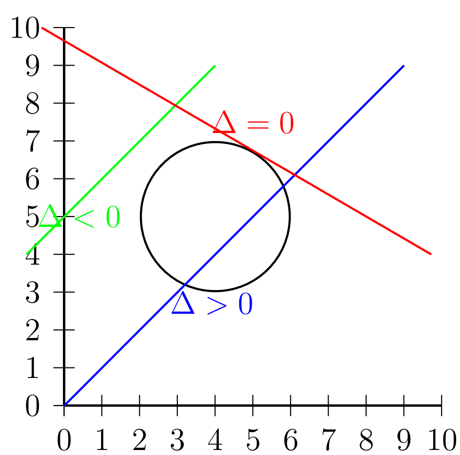
$$x = y - 5$$

Reemplazando ahora en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 4 \\ (y-5-2)^2 + (y-3)^2 &= 4 \\ (y-7)^2 + (y-3)^2 &= 4 \\ y^2 - 14y + 49 + y^2 - 6y + 9 - 4 &= 0 \\ 2y^2 - 20y + 54 &= 0 \end{aligned}$$

Análogamente calculamos el discriminante y tenemos que $\Delta = -2$, luego la intersección de la circunferencia con la recta l_3 es vacía, es decir no tiene puntos.

Gráficamente nos encontramos en la siguiente situación:



□

2.4.3. Ejercicios Propuestos

1. Considere la recta $y - 2x - c = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Determine el valor de c en cada caso

   a) La recta es tangente a la circunferencia. [*Resp.* $c = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ *o* $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$]

   b) La recta y circunferencia tienen intersección. [*Resp.* $c \in \mathbb{R} - [\frac{-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$]

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia que contiene al punto $(-1, -8)$ y que es tangente a $3x - 4y - 4 = 0$ en el punto $(0, -1)$.

   [*Resp.* $x^2 + y^2 - 6x + 10y = -9$]

3. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio es 9 y cuyo centro esta en la intersección de las rectas $x - 4y = 1$ y $2x - y = 2$.

   [*Resp.* $x^2 + y^2 - 2x = 82$]

4. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$.

   [*Resp.* $x^2 + y^2 + 4y = 0$]

5. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice $A = (-1, 0)$ del triángulo ABC y es tangente a l_{BC} con $B = (2, \frac{9}{4})$ y $C = (5, 0)$.

   [*Resp.* $x^2 + y^2 + 2x = 323$]

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas $l_1 : x + y + 4 = 0$ y $l_2 : 7x - y + 4 = 0$, y su centro se encuentra en la recta $l_3 : 4x + 3y - 2 = 0$.

   [*Resp.* $(x - \frac{11}{4})^2 + (y + 3)^2 = \frac{225}{32}$ *o* $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$]

7. Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2ky = 0$, desde el punto $A = (5, 4)$ se traza la tangente a la circunferencia siendo Q el punto de tangencia. Determine el valor de k para que la longitud del segmento $\overline{AQ}$ sea 1.

   [*Resp.* $k = -5$]

8. Considere la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8x + 6y$. Determine en cada caso la ecuación de la recta l que es tangente a la circunferencia y que pasa por:

   a) $P = (8, 6)$. [*Resp.* $l : 3y = -4x + 50$]

   b) $Q = (11, 4)$. [*Resp.* $l : 3y - 4x + 32 = 0$ *o* $l : 4y + 3x - 49 = 0$]

9. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 - 2x = 2y - y^2$ en el punto $(2, 2)$.

   [*Resp.* $x + y - 4 = 0$]

10. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, -2), (-1, 4)$ y $(4, 6)$.

    [*Resp.* $(x - \frac{8}{3})^2 + (y - \frac{25}{12})^2 = \frac{2465}{144}$]

11. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre la recta $x - 2y - 2 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $x - y + 2 = 0$ y $x + y - 1 = 0$.
    [*Resp.* $(x-5)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \left(\frac{11}{2\sqrt{2}}\right)^2$ *o* $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2$]

12. Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$ en el punto $(6, 5)$.
    [*Resp.* $(x-8)^2 + (y-8)^2 = 13$ *o* $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$]

13. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y que pasa por la intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.
    [*Resp.* $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$ *o* $x^2 + y^2 - 7x + 3y + 2 = 0$]

2.5. Parábola

Definición 27 *Una parábola es el conjunto formado por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado* foco *y de una recta llamada* directriz.

Observación: Solamente se analizaran los casos que la directriz sea paralela al eje X o al eje Y

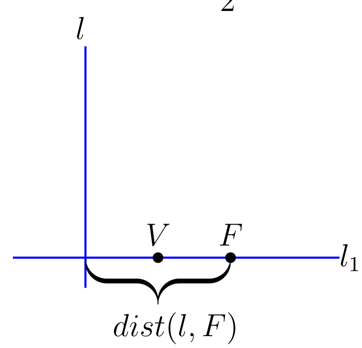
Sea $F \in \mathbb{R}^2$ que representa el foco y l una recta del plano (en el dibujo paralela al eje Y). Consideremos la recta que pasa por el foco y es perpendicular a l, es decir, $l_1 \perp l$, l_1 es llamada *eje focal*.

Sea $r \in \mathbb{R}^+$ la distancia que hay entre el foco y la directriz

$$dist(l, F) = r = 2p$$

Si $V \in \mathbb{R}^2$ el punto medio $\overline{FP_0}$, donde P_0 es el punto de intersección de l y l_1, el punto anteriormente nombrado lo llamaremos vértice de la parábola

$$dist(l, V) = dist(F, V) = \frac{r}{2} = p$$



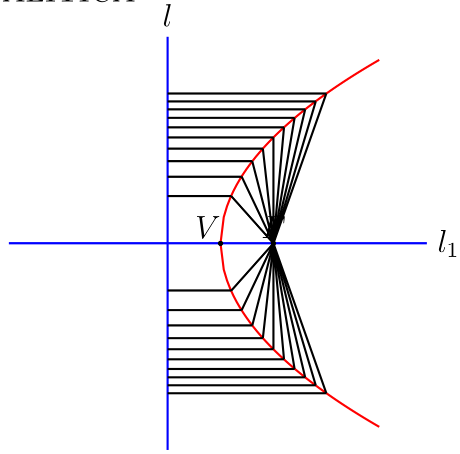
Sea $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que pertenece a la parábola, luego

$$dist(l, P) = dist(F, P)$$

Así tenemos que la parábola con foco F y directriz l es:

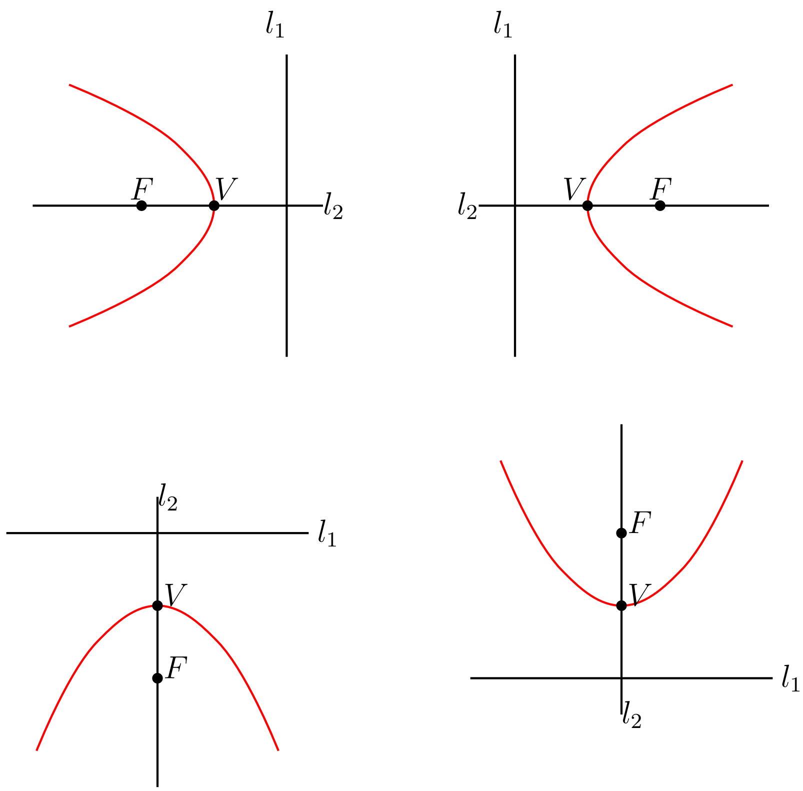
$$\mathcal{P}_{(l,F)} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(l, P) = dist(F, P)\}$$

El cual gráficamente corresponde a la siguiente figura



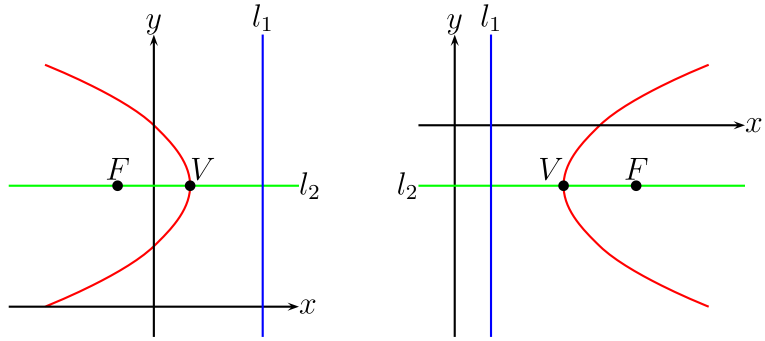
Luego al considerando solamente los puntos, sin marcar las distancias, tenemos la siguiente figura conocida como parábola.

Observación: Note que hemos realizado el proceso en general y solamente hemos visualizado una de las posibilidades que se pueden generalizar como sigue:



2.5.1. Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje X

Sean $F, V \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h + p, k)$ el foco y $l_1 : x = h - p$ la directriz. Como en este caso estamos con el eje focal paralelo al eje X nos encontramos en los siguientes casos:



Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola, luego las distancia son:

$$dist(l, P) = \frac{| 1 \cdot x + 0 \cdot y + p - h |}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = | x + p - h |$$

Luego por la formula de distancia entre puntos obtenemos

$$dist(F, P) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2}$$

Realicemos el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$, en estas coordenadas obtenemos

$$| u + p | = \sqrt{(u - p)^2 + v^2}$$

$$(u + p)^2 = (u - p)^2 + v^2$$
$$v^2 = (u + p)^2 - (u - p)^2 = 4pu$$

Así entonces tenemos que

$$v^2 = 4pu,$$

volviendo a las coordenadas originales

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Propiedad 42 *Sea $F, V, P \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h + p, k)$ el foco, $l : x = h - p$ la directriz entonces $P = (x, y) \in \mathcal{P}_{(l,F)}$ pertenece a la parábola si y sólo si satisface la ecuación*

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \tag{2.11}$$

Ejemplo 73 *Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz, el foco si esta tiene como vértice $(0, 0)$, pasa por el punto $(4, -3)$ y el eje focal está en el eje X.*

Solución: Como la parábola tiene su vértice en el origen $(h, k) = (0, 0)$, tenemos que su ecuación esta dada por:

$$y^2 = 4px$$

Pero además pasa por el punto $(4, -3)$, el cual debe satisfacer la ecuación

$$\begin{aligned} y^2 &= 4px \\ (-3)^2 &= 4p \cdot 4 \\ p &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Luego el foco esta dado por el punto $(p, 0)$ lo que corresponde a $(\frac{9}{16}, 0)$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l : x = -p$, es decir,

$$l : x = -\frac{9}{16}$$

□

Ejemplo 74 *Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz y su foco si el vértice es* $(6, 2)$*, pasa por el punto* $(-3, 5)$ *y el eje focal es paralelo al eje* X*.*

Solución: Como la parábola tiene su vértice en el punto $(6, 2)$ tenemos que su ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= 4p(x-h) \\ (y-2)^2 &= 4p(x-6) \end{aligned}$$

Además, pasa por el punto $(-3, 5)$ el cual debe satisfacer la ecuación

$$\begin{aligned} (y-2)^2 &= 4p(x-6) \\ (-3-2)^2 &= 4p \cdot (5-6) \\ 25 &= -4p \\ p &= \frac{-4}{25} \end{aligned}$$

Luego el foco esta dado por el punto

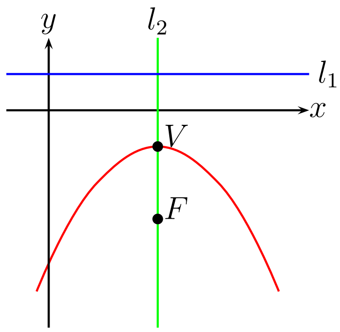
$$(h+p, k) = \left(6 + \frac{-4}{25}, 2\right) = \left(\frac{146}{25}, 2\right)$$

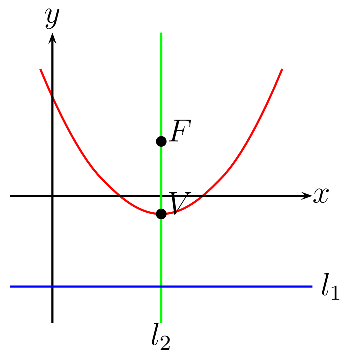
Finalmente la ecuación de la directriz $l : x = h - p$ es

$$x = 6 - \frac{-4}{25} = \frac{154}{25}$$

2.5.2. Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje Y

Sea $F, V \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h, k + p)$ el foco y $l_1 : y = k - p$ la directriz.





Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola, luego las distancia son:

$$dist(l, P) = dist(F, P)$$

Usando la formula de distancia punto a recta tenemos

$$dist(l, P) = \frac{| \ 0 \cdot x + 1 \cdot y + p - k \ |}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = | \ y + p - k \ |$$

Ahora la de distancia entre puntos tenemos

$$dist(F, P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2}$$

Por lo tanto como

$$\begin{array}{rcl} dist(l, P) & = & dist(F, P) \\ | \ y + p - k \ | & = & \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2} \end{array}$$

Volvemos a hacer cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$, luego tenemos que

$$| \ v + p \ | = \sqrt{u^2 + (v - p)^2} \qquad\qquad /()^2$$

$$(v + p)^2 = u^2 + (v - p)^2$$

$$u^2 = (v - p)^2 - (v + p)^2 = 4pv$$

Así entonces tenemos

$$u^2 \ = \ 4pv$$

volviendo a las coordenadas originales obtenemos

$$(x - h)^2 \ = \ 4p(y - k)$$

Propiedad 43 *Sea $F, V, P \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h, k + p)$ el foco, $l : y = k - p$ la directriz y $P = (x, y) \in \mathcal{P}_{l,F}$ pertenece a la parábola si y sólo si satisface la ecuación*

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{2.12}$$

Ejemplo 75 *Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz, su foco si esta tiene como vértice* $(0,0)$*, pasa por el punto* $(4,-3)$ *y el eje focal es el eje* Y*.*

Solución: Como la parábola tiene su vértice en el origen $(h,k)=(0,0)$, se tiene que su ecuación esta dada por:

$$x^2 = 4py$$

Pero además pasa por el punto $(4,-3)$ el cual satisface la ecuación, reemplazando se tiene

$$\begin{aligned} (4)^2 &= 4p\cdot -3 \\ p &= \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Luego el foco esta dado por el punto $(0,p)$ lo que corresponde a $(0,\frac{-3}{4})$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l: y=-p$

$$l: y = \frac{3}{4}$$

□

Ejemplo 76 *Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz y su foco si el vértice es* $(6,2)$*, pasa por el punto* $(-3,5)$ *y si su eje focal es paralelo al eje* Y*.*

Solución: Como la parábola tiene su vértice es $(h,k)=(6,2)$ y el eje focal es paralelo al eje X, se tiene que la ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned} (x-h)^2 &= 4p(y-k) \\ (x-6)^2 &= 4p\cdot(y-2) \end{aligned}$$

Pero además pasa por el punto $(-3,5)$, es decir, satisface la ecuación

$$\begin{aligned} (-3-6)^2 &= 4p\cdot(5-2) \\ (-9)^2 &= 4p\cdot 3 \\ p &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Luego el foco esta dado por el punto $(h,k+p)$ lo que corresponde a $(6,2+\frac{27}{4})=(6,\frac{35}{4})$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l: y=k-p$

$$l: y = 2-\frac{27}{4}=\frac{19}{4}$$

□

Observación: El concepto de *recta tangente* a una parábola en un punto perteneciente a ella es una recta que pasa por el punto y los otros puntos de la parabola perteneces al mismo semiplano dado por esta recta.

Resumen: Dada una parábola, sean $V,F,A_1,A_2\in\mathbb{R}^2$, donde $F=(a,b)$, $V=(h,k)$, $A_1=(a_1,b_1)$, $A_2=(a_2,b_2)$ y l,l_1 rectas del plano cartesiano. Los distintos elementos de una parábola distribuidos de la siguiente forma en la figura 2.4:

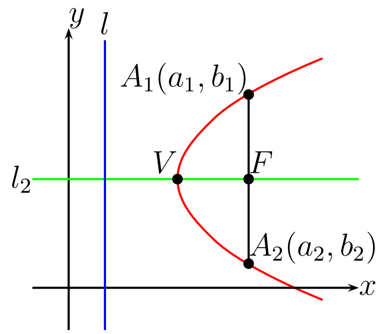


Figura 2.4:

1. **Parábola con eje focal paralelo al eje X.**

   i) El Vértice de la parábola está dado por $V = (h, k)$

   ii) El Foco de la parábola está dado por $F = (h + p, k)$

   iii) La Directriz de la parábola está dado por $l : x = h - p$

   iv) El Eje Focal de la parábola está dado por $l_1 : y = k$

   v) El Lado Recto de la parábola $\overline{A_1A_2}$ mide $4|p|$

   vi) La ecuación de la parábola está dado por $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

   vii) La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (a, b), está dado por $y - b = \frac{2p}{b-k}(x - a)$, con $b \neq k$

2. **Parábola con eje focal paralelo al eje Y.**

   i) El Vértice de la parábola está dado por $V = (h, k)$

   ii) El Foco de la parábola está dado por $F = (h, k + p)$

   iii) La Directriz de la parábola está dado por $l : y = h - p$

   iv) El Eje Focal de la parábola está dado por $l_1 : x = h$

   v) El Lado Recto de la parábola $\overline{A_1A_2}$ mide $4|p|$

   vi) La ecuación de la parábola está dado por $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

   vii) La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (a, b) está dado por $y - b = \frac{a-h}{2p}(x - a)$.

Ejemplo 77 *Encuentre la ecuación de la parábola de vértice $V = (2, 3)$, foco en la recta $7x + 3y - 4 = 0$ y eje focal horizontal.*

Solución: Como la parábola tiene su vértice $V = (2, 3) = (h, k)$ y eje focal horizontal su ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned}(y - k)^2 &= 4p(x - h)\\(y - 3)^2 &= 4p(x - 2)\end{aligned}$$

Ya que el foco esta dado por $F = (h + p, k)$ entonces

$$F = (2 + p, 3)$$

además el foco F está en la recta, luego satisface la ecuación $7x + 3y = 4$, reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} 7(2 + p) + 3 \cdot 3 &= 4 \\ 14 + 7p + 9 &= 4 \\ 7p &= -19 \\ p &= \frac{-19}{7} \end{aligned}$$

Por lo tanto el foco de la parábola es

$$F = (2 + \frac{-19}{7}, 3) = (\frac{-5}{7}, 3)$$

y su ecuación es

$$\begin{aligned} (y - 3)^2 &= 4p(x - 2) \\ (y - 3)^2 &= 4\left(\frac{-19}{7}\right)(x - 2) \end{aligned}$$

$\square$

Observación: La ecuación general de la parábola esta dada por

1. Consideremos la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje X.

$$\begin{aligned} (y - k)^2 &= -4p(x - h) \\ y^2 - 2ky + k^2 &= -4px + 4ph \\ y^2 - 2ky + 4px + k^2 - 4ph &= 0 \end{aligned}$$

   Definamos las constantes

$$A_1 = -2k, \quad B_1 = 4p, \quad C_1 = k^2 - 4ph.$$

   Reemplazando obtenemos la ecuación

$$y^2 + A_1 y + B_1 x + C_1 = 0$$

2. Ahora consideremos la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje Y

$$\begin{aligned} (x - h)^2 &= 4p(y - k) \\ x^2 - 2xh + h^2 &= 4py - 4pk \\ x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk &= 0 \end{aligned}$$

   Definimos las constantes

$$A_2 = -2h, \quad B_2 = -4p, \quad C_2 = h^2 + 4pk.$$

   Reemplazando obtenemos

$$x^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

Propiedad 44 *Sean $A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}^*$ entonces*

1. *La ecuación $x^2 + Ax + By + C = 0$ corresponde a una parábola, con el eje focal paralelo al eje Y,*

   a) *El vértice $(h,k) = \left(\frac{-A}{2}, \frac{A^2-4C}{4B}\right)$,*

   b) *El foco $F = (h, k+p)$, con $p = \frac{-B}{4}$,*

   c) *La directriz $l : y = k - p$.*

2. *La ecuación $y^2 + Ay + Bx + C = 0$ corresponde a una parábola, con el eje focal paralelo al eje X,*

   a) *El vértice $(h,k) = \left(\frac{A^2-4C}{4B}, \frac{-A}{2}\right)$,*

   b) *El foco $F = (h+p, k)$ con $p = \frac{-B}{4}$,*

   c) *La directriz $l : x = h - p$.*

Ejemplo 78 *Considere la ecuación de la parábola $2x^2 + 5x + y - 13 = 0$. Encuentre toda los elementos distinguidos de la parábola.*

Solución: Para determinar los elementos, completaremos cuadrado, para ello tenemos que la ecuación de la parábola

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 5x + y - 13 &= 0 \\
2x^2 + 5x &= -y + 13 \quad / \cdot \frac{1}{2} \\
\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) &= \frac{-y}{2} + \frac{13}{2} \ / + \frac{25}{16} \\
\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) &= \frac{-y}{2} + \frac{13}{2} + \frac{25}{16} \\
\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{-y}{2} + \frac{129}{16} \\
\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{-1}{2}\left(y - \frac{129}{8}\right)
\end{aligned}
$$

Luego $4p = -\frac{1}{2}$ entonces $p = -\frac{1}{8}$.

Por lo tanto el vértice de la parábola esta dado por

$$V = (h,k) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{129}{8}\right)$$

El foco dado por

$$F = (h, k+p) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{129}{8} - \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{128}{8}\right) = \left(\frac{-5}{4}, 16\right)$$

La directriz de la parábola tiene como ecuación

$$l \quad : \quad y = k - p = \frac{129}{8} - \frac{-1}{8} = \frac{130}{8} = \frac{65}{4}$$

El eje focal es

$$x \quad = \quad \frac{-5}{4}$$

Y el lado recto mide

$$4p \quad = \quad \frac{1}{2}$$

□

2.5.3. Ejercicios Propuestos

1. Grafique y encuentre vértice, foco y directriz en las siguientes ecuaciones.

    a) $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

    b) $y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$

    c) $y^2 + 1 = x$

    d) $y^2 - x - 6y + 11 = 0$

    e) $y^2 - 6x + 6y + 27 + 27 = 0$

    f) $x^2 = -4x - 3y - 7$

    g) $4y^2 - 48x - 20y = 71$

2. Encuentre el o los puntos de intersección de las siguientes parábolas $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ e $y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$.

    [Resp. $(2, -2)$ y $(2, 6)$]

3. Indique que representa la ecuación $x^2 + 4x - 8y + 36 = 0$, grafiquela y encuentre todas sus componentes.

4. Determinar la ecuación de la parábola cuya directriz pasa por $(-3, 0)$ con vértice en el origen.

    [Resp. $y^2 = 12x$]

5. Encuentre la ecuación de la directriz de la parábola $y = 2x^2$.

    [Resp. $y = \frac{-1}{8}$]

6. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $(0, 0)$, $(8, -4)$ y $(3, 1)$.

    [Resp. $y^2 - x + 2y = 0$]

7. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4,-1)$, eje la recta $y+1=0$ y que pasa por el punto $(3,-3)$.

   [Resp. $y^2+4x+2y-15=0$]

8. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x+3=0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1,1)$.

   [Resp. $y^2-4x-2y+1=0$]

9. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y-1=0$ y a la circunferencia $x^2+y^2=9$.

   [Resp. $x^2-4y-4=0$ o $x^2+8y-16=0$]

10. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2+4x+12y-8=0$ que es paralela a la recta $3x+9y-11=0$.

    [Resp. $x+3y-2=0$]

11. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(1,4)$ a la parábola $y^2-3x-8y+10=0$.

    [Resp. $x+2y-9=0$ o $3x-2y+5=0$]

12. Determine la ecuación de la recta que es tangente a la parábola $x^2=-5y$ en el punto $(5,-5)$.

    [Resp. $L: y=-2x+5$]

13. Hallar la ecuación de las tangentes a la parábola $y^2+3x-6y+9=0$ y que pasa por el punto $(1,4)$

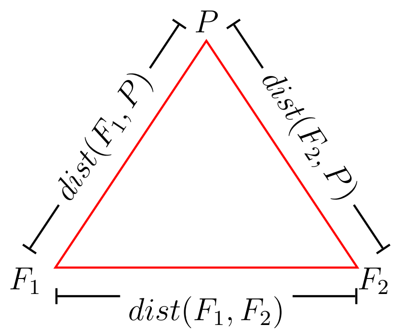
    [Resp. $L_1: 2y=-x+9, \quad L_2: 2y=3x+5$]

2.6. Elipse

Definición 28 *Una elipse es el conjunto de todos los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante, los dos puntos fijos son llamados focos.*

Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ donde F_1 y F_2 representan los focos de la elipse y P un punto de la elipse, luego

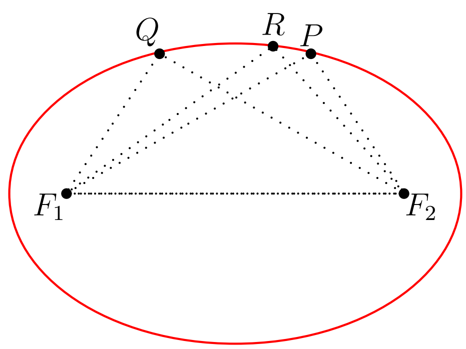
$$dist(P,F_1)+dist(P,F_2)=r$$



Repitiendo el proceso para todos los puntos del plano que satisfacen la definición de la elipse tenemos el conjunto

$$\mathcal{E}_{F_1,F_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = r\}$$

Si graficamos todos los puntos que pertenecen a $\mathcal{E}_{F_1,F_2}$ tenemos lo siguiente:

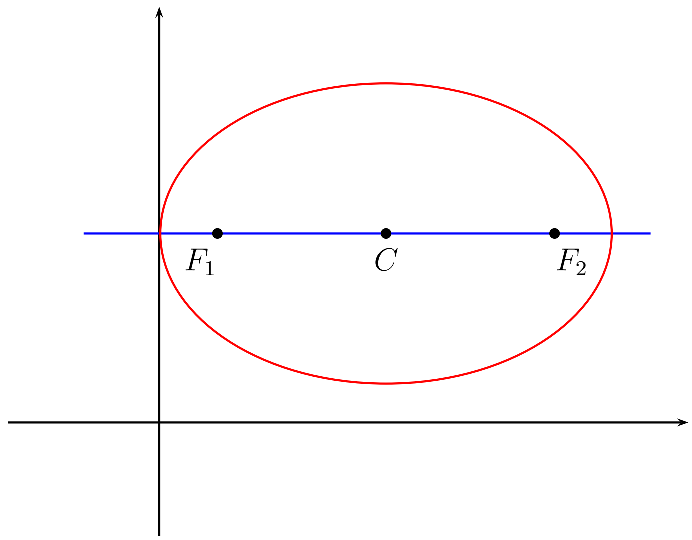


Consideremos la distancia entre los focos $dist(F_1, F_2)$ y el punto medio que hay entre ellos que llamaremos *centro* de la elipse que denotaremos con la letra C y $l \in \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por ambos focos llamada el *eje focal* de la elipse.

2.6.1. Ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje X

Sea $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con $C = (h, k)$ el centro de la elipse, F_1 y F_2 los focos y $P = (x, y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

Como $C = (h, k)$ y el eje focal paralelo al eje X luego $F_1 = (h + c, k), F_2 = (h - c, k)$, por lo cual tenemos Observemos la gráfica de la elipse para este caso.



$$\begin{aligned} dist(F_1,P)+dist(F_2,P) &= 2a \\ \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$ obtenemos

$$\begin{aligned}
2a &= dist(P,F_1)+dist(P,F_2) \\
2a &= \sqrt{(u-c)^2+v^2}+\sqrt{(u+c)^2+v^2} \\
2a-\sqrt{(u+c)^2+v^2} &= \sqrt{(u-c)^2+v^2} \quad /()^2 \quad (*) \\
(2a-\sqrt{(u+c)^2+v^2})^2 &= (\sqrt{(u-c)^2+v^2})^2 \\
4a^2-4a\sqrt{(u+c)^2+v^2}+(u+c)^2+v^2 &= (u-c)^2+v^2 \\
(u+c)^2-(u-c)^2+4a^2 &= 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} \\
4a^2+4uc &= 4a\sqrt{(x+c)^2+v^2} \quad /\frac{1}{4} \\
a^2+uc &= a\sqrt{(u+c)^2+v^2} \quad /()^2 \quad (*) \\
a^4+2a^2uc+u^2c^2 &= a^2((u+c)^2+v^2) \\
a^4+2a^2uc+u^2c^2 &= a^2(u^2+2uc+c^2+v^2) \\
a^4+2a^2uc+u^2c^2 &= a^2u^2+2a^2uc+a^2c^2+a^2v^2 \\
a^2u^2-u^2c^2+a^2c^2+a^2v^2-a^4 &= 0 \\
u^2(a^2-c^2)+a^2v^2 &= a^4-a^2c^2 \\
u^2(a^2-c^2)+a^2v^2 &= a^2(a^2-c^2) \quad /\frac{1}{a^2(a^2-c^2)} \\
\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{a^2-c^2} &= 1
\end{aligned}$$

Como $2a > 2c$ entonces $a^2 - c^2 > 0$, sea $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, luego $b < a$.

Reemplazando tenemos

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

en las variables originales se tiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{2.13}$$

Observación: Para lograr este resultado debemos considerar dos restricciones (*), la primera de ella es:

$$2a - \sqrt{(u+c)^2 + v^2} \geq 0 \Leftrightarrow (u+c)^2 + v^2 \leq (2a)^2$$

y corresponde a circunferencias con centro en F_2 y de radio menor que $2a$, la segunda restricción es

$$4a^2 + 4uc \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{c} \leq u,$$

y son rectas paralelas al eje v, formando el semiplano derecho.

Propiedad 45 *Sea $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ con $C = (h,k)$ representa el centro de la elipse, $F_1 = (c+h, k)$ y $F_2 = (-c+h, k)$ los focos. $P = (x,y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ pertenece a la elipse si y sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \ \ con \ \ a > b$$

Ejemplo 79 *Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el origen, el valor de $a = 4$ y pasa por el punto $p = (3,2)$.*

Solución: Como su centro esta en el origen y $a = 4$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $p = (3,2)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{3^2}{16} + \frac{2^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{9}{16} + \frac{4}{b^2} &= 1 \quad / \cdot 16b^2 \\
9b^2 + 4 \cdot 16 &= 16b^2 \\
64 &= 16b^2 - 9b^2 \\
64 &= 7b^2
\end{aligned}$$

Luego el valor de b^2 es:

$$b^2 = \frac{64}{7} < a^2 = 16$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{64}{3}} = 1$$

$\square$

Ejemplo 80 *Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el punto* $(1, 3)$, *el valor de* $a = 4$ *y pasa por el punto* $p = (2, 5)$.

Solución: Como su centro esta en el origen y $a = 4$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $p = (2, 7)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{(2-1)^2}{16} + \frac{(5-3)^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{1^2}{16} + \frac{2^2}{b^2} &= 1 \quad / \cdot 16b^2 \\
b^2 + 4 \cdot 16 &= 16b^2 \\
64 &= 16b^2 - b^2 \\
64 &= 15b^2
\end{aligned}$$

Luego el valor de b^2 es:

$$b^2 = \frac{64}{15} < a^2 = 16$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{\frac{64}{15}} = 1$$

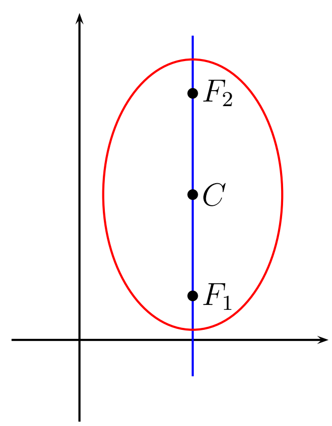
2.6.2. Ecuación de la elipse con eje focal en el eje Y

Sea $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$, donde $C = (h,k)$ representa el centro de la elipse, F_1 y F_2 los focos y $P = (x,y)$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

Como el centro es $C = (h,k)$ y el eje focal paralelo al eje Y luego $F_1 = (h, k+c)$ y $F_2 = (h, k-c)$, por lo cual tenemos

$$\begin{aligned} dist(F_1,P) + dist(F_2,P) &= 2a \\ \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Observemos la gráfica de la elipse para este caso.



Realizando el cambio de variable $v = x - h \quad$ y $\quad u = y - k$

$$\begin{aligned} dist(F_1,P) + dist(F_2,P) &= 2a \\ \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} &= 2a \\ \sqrt{(v)^2 + (u-c)^2} + \sqrt{(v)^2 + (u+c)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Y es un expresión igual a la obtenida en el caso anterior $(*)$ de la sección anterior, luego usando el mismo desarrollo tenemos

$$u^2(a^2 - c^2) + v^2x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

de manera similar definimos $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ con lo cual

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \tag{2.14}$$

Propiedad 46 *Sean $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con $C = (h,k)$ el centro de la elipse, $F_1 = (h, c+k)$ y $F_2 = (h, -c+k)$ los focos.*

$P = (x,y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ pertenece a la elipse si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \quad con \quad a > b.$$

Ejemplo 81 *Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el origen, el valor de $a = 6$ y pasa por el punto $p = (2, 5)$.*

Solución: Como su centro esta en el origen y $a = 6$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $p = (2, 5)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{36} &= 1 \\ \frac{4}{b^2} + \frac{25}{36} &= 1 \quad / \cdot 36b^2 \\ 4 \cdot 36 + 25b^2 &= 36b^2 \\ 144 &= 36b^2 - 25b^2 \\ 144 &= 11b^2 \\ b^2 &= \frac{144}{11} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{144}{11}} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$\square$

Ejemplo 82 *Encuentre la ecuación de la elipse de centro $(4, 3)$, el valor de $a = 6$ y pasa por el punto $p = (2, 5)$.*

Solución: Como su centro esta en $(h, k) = (4, 3)$ y $a = 6$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \\ \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{6^2} &= 1 \\ \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $p = (2, 5)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{36} &= 1 \\
\frac{(4-2)^2}{b^2} + \frac{(3-5)^2}{36} &= 1 \\
\frac{4}{b^2} + \frac{4}{36} &= 1 \quad / \cdot 36b^2 \\
4 \cdot 36 + 4b^2 &= 36b^2 \\
144 &= 144b^2 - 4b^2 \\
144 &= 140b^2
\end{aligned}$$

Luego el valor de b^2 es:

$$b^2 = \frac{144}{140}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-4)^2}{\frac{144}{140}} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$$

$\square$

Observación: Consideremos la ecuación de la elipse donde el eje focal es paralelo al eje X, para ello sean $C = (h, k)$ el centro de la elipse, F_1 y F_2 los focos y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Luego desarrollando la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \quad /(a^2b^2) \\
b^2[(x-h)^2] + a^2[(y-k)^2] &= a^2b^2 \\
b^2[x^2 - 2xh + h^2] + a^2[y^2 - 2yk + k^2] &= a^2b^2 \\
x^2b^2 - 2xhb^2 + h^2b^2 + y^2a^2 - 2yka^2 + k^2a^2 &= a^2b^2 \\
x^2b^2 - 2xhb^2 + y^2a^2 - 2yka^2 + k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2 &= 0
\end{aligned}$$

Definimos las siguientes constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \in \mathbb{R}$ dadas por

$$A_1 = b^2; \quad B_1 = -2hb^2; \quad C_1 = a^2; \quad D_1 = -2ka^2; \quad E_1 = k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2.$$

Entonces tenemos que la ecuación general de la elipse para este caso está dada por:

$$A_1x^2 + B_1x + C_1y^2 + D_1y + E_1 = 0$$

Ahora consideremos la ecuación de la elipse, con el eje focal es paralelo al eje Y dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Haciendo un desarrollo similar al anterior, podemos definir $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A_2=a^2; \quad B_2=-2ha^2; \quad C_2=b^2; \quad D_2=-2kb^2; \quad E_2=k^2b^2+h^2a^2-a^2b^2.$$

Entonces tenemos que la ecuación general de la elipse para este caso está dada por:

$$A_2x^2+B_2x+C_2y^2+D_2y+E_2=0$$

Propiedad 47 *Sean $A, C \in \mathbb{R}^*$, $B, D, E \in \mathbb{R}$ la ecuación*

$$Ax^2+Bx+Cy^2+Dy+E = 0$$

define una elipse si y sólo si

$$AC>0 \quad y \quad (B^2C+D^2A-4ACE)C>0.$$

Observación: En algunos textos considera la primer condiciones solamente, pero debe notar que la ecuación $x^2+4y^2+1=0$, en el plano real tiene conjunto solución vacío, por ello no es fácil aceptar que es una elipse, ya que las suma de longitudes es positiva.

Ejemplo 83 *Hallar la ecuación de la elipse de centro* $(1,2)$*, uno de los focos es* $(6,2)$ *y que pasa por el punto* $(4,6)$

Solución: Como su centro es $(1,2)$ y el eje focal es paralelo al eje X. Luego su ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1\\ \frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

Ya que pasa por el punto $(4,6)$

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2} &= 1\\ \frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2} &= 1\\ \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2} &= 1 \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Tenemos que la distancia del centro al foco es:

$$c=dist(C,F)=\sqrt{(1-6)^2+(2-2)^2}=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ b^2 &= a^2 - 25 \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación 2.15

$$\begin{aligned} \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} &= 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^2 - 25} &= 1 \ / \cdot (a^2 - 25)a^2 \\ 9(a^2 - 25) + 16a^2 &= a^2(a^2 - 25) \\ a^4 - 25a^2 - 16a^2 - 9a^2 + 225 &= 0 \\ a^4 - 50a^2 + 225 &= 0 \end{aligned}$$

Sea $u = a^2$ entonces

$$u^2 - 50u + 225 = 0$$

Luego

$$u = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 900}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{2} = \frac{50 \pm 40}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{50 + 40}{2} \quad &\text{y} \quad u_2 = \frac{50 - 40}{2} \\ u_1 = \frac{90}{2} \quad &\text{y} \quad u_2 = \frac{10}{2} \\ u_1 = 45 \quad &\text{y} \quad u_2 = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a^2 = 45 \quad \text{o} \quad a^2 = 5$$

Si $a^2 = 5$ tenemos

$$b^2 = a^2 - 25 = 5 - 25 = -20 \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Entonces $a^2 = 45$, luego

$$b^2 = a^2 - 25 = 45 - 25 = 20$$

Por lo tanto reemplazando los valores de a^2 y b^2 obtenemos que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

$\square$

2.6.3. Ejercicios Propuestos

1. Grafique y encuentre todos los elementos de la elipse de la ecuación.

   a) $9x^2 + 2y^2 + 36x + 4y + 20 = 0$

   b) $16x^2 + 9y^2 - 64x + 54y + 1 = 0$

   c) $25x^2 + 16y^2 + 150x - 64y = 102$

   d) $4x^2 + 6y^2 = 12$

   e) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

   f) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

   g) $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$

2. Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y su diámetro mayor es 6.

   [Resp. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$]

3. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(1, 2)$, uno de los focos es $(6, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 6)$.

   [Resp. $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$]

4. Determinar las coordenadas de los focos de la elipse $2x^2 + 7y^2 = 3$

   [Resp. $F_1 = (\sqrt{\frac{15}{14}}, 0)$, $F_2 = (-\sqrt{\frac{15}{14}}, 0)$]

5. Hallar los vértices y el área de un cuadrado con lados paralelos a los ejes de coordenados inscrito en la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 100$.

   [Resp. $A = 16$, $V_1 = (0, -0.4)$, $V_2 = (0, 0.4)$, $V_3 = (-0.3, 0)$, $V_4 = (0.3, 0)$]

6. El centro de una elipse esta en el punto $(2, -4)$ el vértice y foco de un mismo lado del centro están en los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$ respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse.

   [Resp. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$]

7. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X . Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

   [Resp. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$]

8. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

   [Resp. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$]

9. Hallar la ecuación de la elipse que contiene a los siguientes puntos $(1,3)$, $(-1,4)$, $(0, 3-\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(-3,3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

   [Resp. $x^2+4y^2+2x-24y+33=0$]

10. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3,2)$.

    [Resp. $3x^2+4y^2-24x-16y+52=0$]

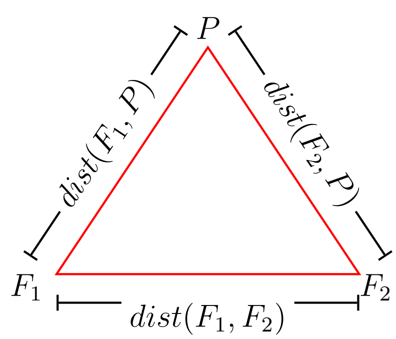
11. Desde cada punto de la circunferencia $x^2+y^2+4x+4y-8=0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares.

    [Resp. $x^2+4y^2+4x+16y+4=0$]

2.7. Hipérbola

Definición 29 *Una hipérbola es una figura geométrica plano y corresponde al conjunto de todos los puntos que se encuentran en el plano tales que el valor absoluto de la recta de sus distancias a dos puntos fijos es constante, los puntos fijos se llaman focos.*

Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ donde F_1 y F_2 son puntos fijos en el plano que denotaremos como focos y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que satisface la definición de la hipérbola



entonces consideremos las distancias que hay entre estos 3 puntos

Como P satisface la definición de la hipérbola tenemos

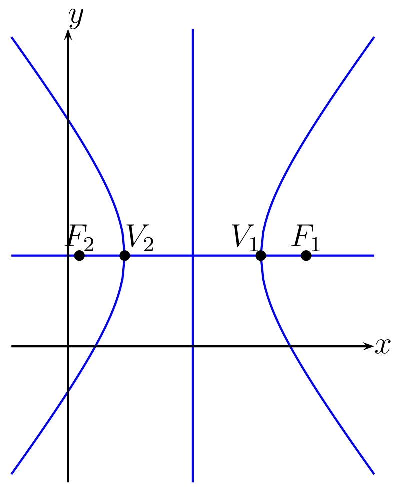
$$|\ dist(P,F_1) - dist(P,F_2)\ | = r$$

Luego $\mathcal{H}_{F_1,F_2}$ representa al conjunto de todos los puntos que pertenecen a la hipérbola, es decir,

$$\mathcal{H}_{F_1,F_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 \quad | \ |\ dist(P,F_1) - dist(P,F_2)\ | = r\}$$

2.7.1. Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje X

Sean $V_1, V_2, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, donde V_1, V_2 representan los vertices de la hipérbola, F_1 y F_2 los focos y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la hipérbola.



Sea $C = (h, k)$ el centro entonces los focos para nuestro caso están dados por:

$$F_1 = (h - c, k) \quad y \quad F_2 = (h + c, k)$$

luego

$$\begin{aligned} \mid dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

usando el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$

$$\begin{aligned} \mid \sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(u + c)^2 + v^2} - \sqrt{(u - c)^2 + v^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos los siguientes casos

1. $$\sqrt{(u + c)^2 + v^2} - \sqrt{(u - c)^2 + v^2} = 2a$$

2. $$\sqrt{(u + c)^2 + v^2} - \sqrt{(u - c)^2 + v^2} = -2a$$

Si P está en la parte izquierda de los focos tenemos que 1 es verdadero y si P se encuentra en la parte derecha, 2 es verdadero, luego tenemos

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{(u \pm c)^2 + v^2} - \sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} & = & 2a \quad (*) \\
\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} & = & 2a + \sqrt{(u \mp c)^2 + y^2} \quad /()^2 \\
(u \pm c)^2 + v^2 & = & (2a + \sqrt{(u \mp c)^2 + y^2})^2 \\
u^2 \pm 2uc + c^2 + v^2 & = & 4a^2 + 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} + (u \mp c)^2 + v^2 \\
u^2 \pm 2uc + c^2 + v^2 & = & 4a^2 + 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} + u^2 \mp 2uc + c^2 + v^2 \\
\pm 4uc - 4a^2 & = & 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} \quad /\frac{1}{4} \\
\pm uc - a^2 & = & a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} \quad /()^2
\end{array}$$

Antes veremos la restricción

$$\begin{array}{c}
\pm uc - a^2 \geq 0 \\
uc - a^2 \geq 0 \quad \vee \quad -uc - a^2 \geq 0 \\
u \geq \frac{a^2}{c} \quad \vee \quad u \leq \frac{a^2}{c}
\end{array}$$

luego es un semiplano o en el otro. Además como $2a < 2c$

$$\begin{array}{rcl}
u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 & = & a^2((u \mp c)^2 + v^2) \\
u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 & = & a^2(u^2 \mp 2uc + c^2 + v^2) \\
u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 & = & a^2u^2 \mp 2a^2uc + a^2c^2 + a^2v^2 \\
u^2(c^2 - a^2) - a^2v^2 & = & a^2(c^2 - a^2)
\end{array}$$

Como $2a < 2c$ entonces $a^2 < c^2$, es decir, $c^2 - a^2 > 0$.
Por lo tanto, sea b^2 tal que

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0$$

Reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
u^2(c^2 - a^2) - a^2v^2 & = & a^2(c^2 - a^2) \\
u^2b^2 - a^2v^2 & = & a^2b^2 \quad /\frac{1}{a^2b^2} \\
\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} & = & 1
\end{array}$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{2.16}$$

Propiedad 48 *Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, con $C = (h,k)$ el centro de la hipérbola, $F_1 = (h-c,k)$ y $F_2 = (h+c,k)$ los focos y $P = (x,y)$ pertenece a la hipérbola si sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Los vértices son $V_1 = (h-a,k)$ y $V_2 = (h+a,k)$

Ejemplo 84 *Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un foco $F_1 = (5, 0)$, el valor de $a = 2$ y el eje focal en el eje X.*

Solución: Como el centro de la hipérbola es $C = (0, 0)$ y $F_1 = (5, 0)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$\begin{aligned} dist(C, F_1) &= \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ya que $c = 5$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 5^2 &= b^2 + 2^2 \\ 25 - 4 &= b^2 \\ b^2 &= 21 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} &= 1. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 85 *Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C = (4, 3)$, un foco $F_1 = (8, 3)$, el valor de $a = 2$ y el eje focal paralelo al eje X.*

Solución: Como el centro de la hipérbola es $C = (4, 3)$ y $F_1 = (8, 3)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(8-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(4)^2} = 4$$

Ya que $c = 4$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ b^2 &= 12 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \frac{(x-4)^2}{a^2} - \frac{(y-3)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{144} &= 1. \end{aligned}$$

□

2.7.2. Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje Y

Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con F_1 y F_2 los focos de la hipérbola, V_1, V_2 los vértices y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la hipérbola.

Sea $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola entonces los focos para nuestro caso son $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$ luego,

$$\begin{aligned} \mid dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} &= 2a \end{aligned}$$

usando el cambio de variable

$$v = x - h \quad \text{y} \quad u = y - k$$

$$\begin{aligned} \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} &= 2a \\ \mid \sqrt{(v)^2 + (u+c)^2} - \sqrt{(v)^2 + (u-c)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Y es un expresión igual a la obtenida en el caso anterior $(*)$ de la sección anterior, luego usando el mismo desarrollo tenemos

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Propiedad 49 *Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ con $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola, $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$ los focos. $P = (x, y)$ pertenece a la hipérbola si y sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Los vértices $F_1 = (h, k - a)$ y $F_2 = (h, k + a)$

Ejemplo 86 *Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un foco $F_1 = (0, 7)$, el valor de $a = 3$ y el eje focal en el eje Y.*

Solución: Como el centro de la hipérbola es $C = (0, 0)$ y $F_1 = (0, 7)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(0-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{(7)^2} = 7$$

Ya que $c = 7$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 7^2 &= b^2 + 3^2 \\ b^2 &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} &= 1. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 87 *Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C = (5,9)$, un foco $F_1 = (5,16)$, el valor de $a = 3$ y el eje focal en el eje Y.*

Solución: Como el centro de la hipérbola es $C = (5,9)$ y $F_1 = (5,16)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(5-5)^2 + (16-9)^2} = \sqrt{(7)^2} = 7$$

Ya que $c = 7$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 7^2 &= b^2 + 3^2 \\ b^2 &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \frac{(y-9)^2}{a^2} - \frac{(x-5)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(y-9)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{49} &= 1. \end{aligned}$$

□

Observación: Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, con $C = (h,k)$ el centro de la hipérbola , F_1 y F_2 los focos

Consideremos la ecuación de la hipérbola donde el eje focal es paralelo al eje X

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollemos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \quad /(a^2b^2) \\ b^2[(x-h)^2] - a^2[(y-k)^2] &= a^2b^2 \\ b^2[x^2 - 2xh + h^2] - a^2[y^2 - 2yk + k^2] &= a^2b^2 \\ x^2b^2 - 2xhb^2 + h^2b^2 - y^2a^2 + 2yka^2 - k^2a^2 &= a^2b^2 \\ x^2b^2 - 2xhb^2 - y^2a^2 + 2yka^2 - k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se define las constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A_1 = b^2; \quad B_1 = -2hb^2; \quad C_1 = -a^2; \quad D_1 = 2ka^2; \quad E_1 = -k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2.$$

$$A_1x^2 + B_1x + C_1y^2 + D_1y + E_1 = 0$$

Análogamente para la otra ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

podemos transformarla

$$A_2y^2 + B_2y + C_2x^2 + D_2x + E_2 = 0$$

Con

$$A_2 = b^2; \quad B_2 = -2kb^2; \quad C_2 = -a^2; \quad D_2 = -2kb^2; \quad E_2 = -k^2b^2 + h^2a^2 - a^2b^2.$$

Propiedad 50 *Sean $A, C \in \mathbb{R}^*, B, D, E \in \mathbb{R}$ la ecuación*

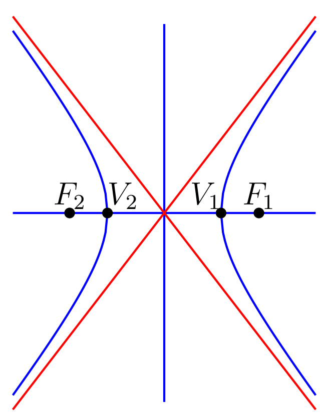
$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E \;=\; 0$$

define una hipérbola si y sólo si

$$AC < 0 \wedge CB^2 + AD^2 - 4ACE \;\neq\; 0$$

2.7.3. Asíntotas de la hipérbola

Las asíntotas de una hipérbola son rectas que se encuentran tangentes a la hipérbola; es decir, para valores muy grandes la recta y una rama de la hipérbola están muy juntas y que gráficamente se representa de la siguiente forma



Observación: Consideremos la ecuación de la hipérbola donde su eje focal se encuentra en el eje X

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad /(a^2b^2) \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

Despejemos y

$$\begin{array}{rcl} b^2x^2 - a^2y^2 & = & a^2b^2 \\ a^2y^2 & = & b^2x^2 - a^2b^2 \\ y^2 & = & \dfrac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2} \quad /\sqrt{} \\ y & = & \pm\sqrt{\dfrac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}} \\ y & = & \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)} \\ y & = & \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2(1 - \dfrac{a^2}{x^2})} \\ y & = & \pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{(1 - \dfrac{a^2}{x^2})} \end{array}$$

Para valores muy grandes de x el valor de $\frac{a^2}{x^2}$ se va acercando a cero.
Luego

$$\frac{b}{a}\ x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \simeq \pm\frac{b}{a}\ x$$

para valores de x muy grandes

$$y = \frac{b}{a}\ x, \quad y = -\frac{b}{a}\ x$$

Definición 30 *Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y la hipérbola $\mathcal{H}_{F_1,F_2}$.*
Si el eje focal es paralelo a eje X, su ecuación esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

entonces la ecuación de las asíntotas de la hipérbola están dadas por

$$(y-k) = \pm\frac{b}{a}\ (x-h)$$

Si el eje focal es paralelo a eje Y, su ecuación esta dada por

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

entonces la ecuación de las asíntotas de la hipérbola están dadas por

$$(y-k) = \pm\frac{a}{b}\ (x-h).$$

Ejemplo 88 *Encuentre el lugar geométrico y toda la información posible de los puntos $p = (x, y)$ cuya distancia al punto fijo $(1, 4)$ sea igual a $\frac{5}{4}$ de la distancia a la recta $5x - 1 = 0$.*

Solución: Calculemos la distancia del punto $p=(x,y)$ al punto $q=(1,4)$

$$dist(p,q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$$

Calculemos la distancia del punto p a la recta $l: 5x-1=0$.

$$dist(l,p) = \frac{\mid Ax+By+C \mid}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{\mid 5x+0y+(-1) \mid}{\sqrt{(5)^2+(0)^2}} = \frac{\mid 5x-1 \mid}{5}$$

Donde $dist(p,q)$ es igual $\frac{5}{4}$ a $dist(l,p)$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} &= \frac{5}{4}\frac{\mid 5x-1 \mid}{5} \\
\sqrt{x^2-2x+1+y^2-8y+16} &= \frac{\mid 5x-1 \mid}{4} / \cdot ()^2 \\
x^2-2x+y^2-8y+17 &= \frac{(5x-1)^2}{16} / \cdot 16 \\
16x^2-32x+16y^2-128y+272 &= 25x^2-10x+1 \\
9x^2+22x-16y^2+128y-271 &= 0 \\
(9x^2+22x)+(-16y^2+128y) &= 271 \\
9\left(x^2+\frac{22}{9}x\right)-16\left(y^2-\frac{128}{16}y\right) &= 271
\end{aligned}$$

Ahora completaremos cuadrado

$$\begin{aligned}
9\left(x^2+2\frac{11}{9}x+\frac{121}{81}-\frac{121}{81}\right)-16(y^2-2\cdot 4y+16-16) &= 271 \\
9\left(x^2+2\frac{11}{9}x+\frac{121}{81}\right)-9\cdot\frac{121}{81}-16(y^2-2\cdot 4y+16)-16\cdot -16 &= 271 \\
9\left(x+\frac{11}{9}\right)^2-16(y-4)^2 &= 271+\frac{121}{9}-256 \\
9\left(x+\frac{11}{9}\right)^2-16(y-4)^2 &= \frac{256}{9} \\
\frac{(x+\frac{11}{9})^2}{\frac{256}{9\cdot 9}}-\frac{(y-4)^2}{\frac{256}{9\cdot 16}} &= 1 \\
\frac{\left(x+\frac{11}{9}\right)^2}{\left(\frac{13}{9}\right)^2}-\frac{(y-4)^2}{\left(\frac{13}{12}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

De donde podemos obtener que el centro de la hipérbola es $(h,k)=(-\frac{11}{9},4)$, además $a=\frac{13}{9}$ y $b=\frac{13}{12}$, con estos valores obtenemos el valor de c

$$c^2 = a^2+b^2 = \frac{256}{81}+\frac{256}{144} = \frac{400}{81} = \left(\frac{20}{9}\right)^2$$

entonces $c = \frac{20}{9}$, luego sus focos están dados por:

$$F_1 = \left(-\frac{11}{9} - \frac{20}{9}, 4\right) = \left(-\frac{31}{9}, 4\right) \quad \text{y} \quad F_2 = \left(-\frac{11}{9} + \frac{20}{9}, 4\right) = (1, 4)$$

Los vértices son

$$V_1 = \left(-\frac{11}{9} - \frac{13}{9}, 4\right) = \left(-\frac{2}{9}, 4\right) \quad \text{y} \quad V_2 = \left(-\frac{11}{9} + \frac{13}{9}, 4\right) = \left(\frac{8}{3}, 4\right)$$

Las asíntotas están dadas por

$$\begin{aligned} (y-k) &= \pm\frac{b}{a}(x-h) \\ (y-4) &= \pm\frac{\frac{13}{12}}{\frac{13}{9}}(x+\frac{11}{9}) \end{aligned}$$

$$(y-4) = \frac{3}{4}(x+\frac{11}{9}) \quad \text{y} \quad (y-4) = -\frac{3}{4}(x+\frac{11}{9}).$$

□

2.7.4. Ejercicios Propuestos

1. Graficar y encontrar todos los elementos que componen a la cónica de ecuación

   a) $9y^2 = 16x^2 - 36y - 96x + 684$

   b) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 50y = 191$

2. Considere la recta l_m de ecuación $y = mx + 1$. Determine todos los valores de $m \in \mathbb{R}$ tales que las recta l_m interseca a la hipérbola $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$.

   [Resp. $m \in \left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ y $m \neq \pm\sqrt{2}$]

3. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 = 0$

   [Resp. $3x^2 - y^2 = 27$]

4. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

   [Resp. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$]

5. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(3, 2)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $y + 1 = 0$.

   [Resp. $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$]

6. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2,-1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x+2=0$.

   [Resp. $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$]

7. Hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$

   [Resp. $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$]

8. Demostrar que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ se intersecan.

Resumen de Cónicas			
	Parábola	Elipse	Hipérbola
	$p = dist(V,F)$ $p = dist(V,l)$ focos sobre el eje	$2a$ =longitud eje mayor $2b$ =longitud eje menor $c^2 = a^2 - b^2$ focos sobre el eje mayor	$2a$ =longitud eje transversal $2b$ =longitud eje conjugado $c^2 = a^2 + b^2$ focos sobre el eje transversal
Eje focal paralelo al eje X			
Ecuación	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Centro		(h,k)	(h,k)
Foco(s)	$(h+p,k)$	$(h \pm c, k)$	$(h \pm c, k)$
Vértice(s)	(h,k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm a, k)$
Eje focal paralelo al eje Y			
Ecuación	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Centro		(h,k)	(h,k)
Foco(s)	$(h,k+p)$	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm c)$
Vértice(s)	(h,k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm a)$
Lado recto	$4p$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Excentri cidad	$e = 1$	$e = \frac{c}{a} < 1$	$e = \frac{c}{a} > 1$

Capítulo 3

Funciones

3.1. Introducción

La noción de función está presente en la vida diaria, cuando nos referimos o hacemos una correspondencia estamos hablando de funciones. Por ejemplo cuando decimos:

- A cada rectángulo le corresponde su área.

- A cada persona la corresponde su peso.

- A cada persona le corresponde su cédula de identidad.

En éstos ejemplos se pueden distinguir dos conjuntos A y B. En el primer ejemplo A denota el conjunto de rectángulos y B el conjunto de los números reales positivos. Es decir, a cada rectángulo x en A le corresponde un real positivo y en B que es su área. Los ejemplos anteriores tienen la particularidad de que dado x que pertenece a A le corresponde un único y que pertenece a B.

Al repasar el primer ejemplo, también es válido decir que el área del rectángulo depende de sus lados, aquí podemos distinguir el concepto de dependencia, donde una de las variables, el área del rectángulo, depende de las otras, sus lados.

3.1.1. Relaciones

Una relación asocia elementos de un conjunto de partida A, a algún o algunos elementos del conjunto de llegada B, es decir, que dados dos conjuntos, una relación $\mathcal{R}$ entre A y B o bien que va desde A hasta B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Los elementos pertenecientes a la relación se denota $(x, y) \in \mathcal{R}$ o bien $x\mathcal{R}y$.

Definición 31 *Una relación de números reales es un subconjunto de* $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 89 *Los siguiente conjuntos son relaciones reales*

1. $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$

2. $\mathcal{P}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$

3. $\mathcal{P}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y + 3\}$

4. $\mathcal{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$

5. $\mathcal{E}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$

6. $\mathcal{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

7. $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1\}$

8. $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$

Sea $\mathcal{R}$ una relación entre A y B, se define el Dominio de la relación $\mathcal{R}$ igual al conjunto de todas las preimágenes de B y se denota como $Dom\mathcal{R}$, es decir,

$$Dom\mathcal{R} = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(x\mathcal{R}y)\}$$

Un subconjunto de B formado por las imágenes de los elementos del $Dom\mathcal{R} \subseteq A$ se llama recorrido, se denota $Rec\mathcal{R}$ y esta definido del siguiente modo:

$$Rec\mathcal{R} = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(x\mathcal{R}y)\}$$

Ejemplo 90 *Sean $A = \{0, 2, 4\}$ y $B = \{a, b\}$ los conjuntos que siguen son relaciones entre A y B.*

1. *$\mathcal{R}_1 = \{(0, a), (2, a), (4, a)\}$, el dominio y recorrido esta dado por*

$$Dom\mathcal{R}_1 = \{0, 2, 4\}, \quad Rec\mathcal{R}_1 = \{a\}.$$

2. *$\mathcal{R}_2 = \{(0, a), (0, b), (2, a)\}$, el dominio y recorrido esta dado por*

$$Dom\mathcal{R}_2 = \{0, 2\}, \quad Rec\mathcal{R}_2 = \{a, b\}.$$

3. *$\mathcal{R}_3 = A \times B$, su dominio es $Dom\mathcal{R}_3 = A$ y el recorrido es $Rec\mathcal{R}_3 = B$.*

Ejemplo 91 *La circunferencia de radio 4 y de centro $(0, 0)$, es una relación en el plano cartesiano, es decir,*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 16\},$$

y en este caso tenemos que

$$Dom\mathcal{R} = [-4, 4], \quad Rec\mathcal{R} = [-4, 4].$$

□

Definición 32 *Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relación, diremos que $\mathcal{R}^{-1}$ es la relación inversa de $\mathcal{R}$ que va desde B a A y se denota como:*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

De la definición se deduce que :

$$(u, v) \in \mathcal{R}^{-1} \Longleftrightarrow (v, u) \in \mathcal{R}.$$

Ejemplo 92 *Sea* $\mathcal{R} = \{(1,1), (3,2), (4,4), (1,2)\}$*, luego la relación inversa de* $\mathcal{R}$ *es:*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(1,1), (2,3), (4,4), (2,1)\}.$$

□

Ejemplo 93 *Sea* $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$*, luego la relación inversa de* $\mathcal{L}$ *es:*

$$\mathcal{L}^{-1} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2b + 3a = 1\}.$$

□

3.2. Función

Una función f es una relación de A en B tal que a cada elemento del dominio de la relación le corresponde un único elemento del recorrido de la relación.

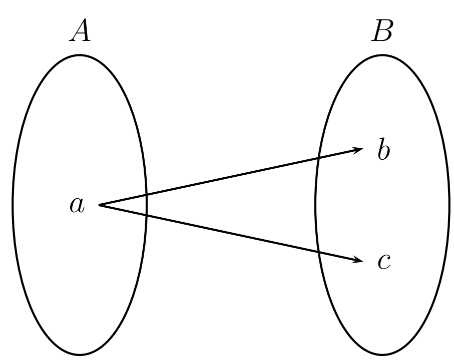
Definición 33 *Se dice que* f *es una función de números reales si y sólo si*

i) f *una relación números reales y*

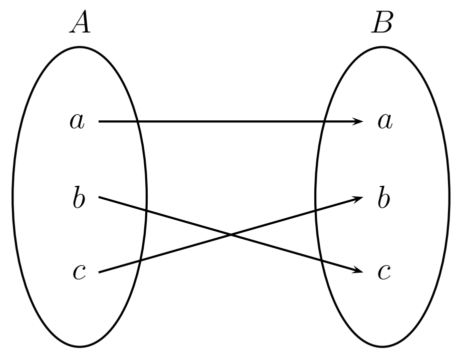
ii) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$

Observación: En general, se dice que f es una función de A en B si y sólo si f es una relación entre A y B y $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(xfy)$.

Es decir, no es función cuando un el elemento tiene más de una imagen en el conjunto de llegada. Podemos graficar esta situación, donde f **no es función**, con el siguiente diagrama



En cambio el siguiente diagrama, representa una función.



Ejemplo 94 *Determinar si la siguiente relación es una función*

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

Solución: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{L}$

Luego tenemos que

$$2a + 3b = 1 \quad \wedge \quad 2a + 3c = 1$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 2a + 3c \\ 3b &= 3c \\ b &= c \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{L}$ es función $\square$

Ejemplo 95 *Determinar si la siguiente relación es una función*

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$$

Solución: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{P}$. Luego tenemos que

$$b^2 = 4a + 1 \quad \wedge \quad c^2 = 4a + 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

podemos considerar los pares ordenados $(1, 5)$ y $(1, -5)$ ambos puntos pertenece a $\mathcal{P}$ pero $5 \neq -5$, luego $\mathcal{P}$ no es una función. $\square$

Ejemplo 96 *Determinar si la siguiente relación es una función*

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

Solución: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{H}$. Luego tenemos que $a \in \mathbb{R}_0^+, b, c \in \mathbb{R}^-$ además

$$b^2 - 3a^2 = 1 \quad \wedge \quad c^2 - 3a^2 = 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 - 3a^2 = c^2 - 3a^2$$

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

pero $b < 0$ y $c < 0$, luego es imposible que $b = -c$ por lo tanto tenemos que

$$b = c.$$

Así $\mathcal{H}$ es una función. □

Ejercicio 97 *Determine si los siguientes conjunto son funciones*

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2 \}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4 \}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \wedge y \geq 3 \}$
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y - 1)^2}{9} = 1 \}$
5. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y - 1)^2}{9} = 1 \wedge y \leq 1 \}$

Observación: Tenga presente que una función es un conjunto, luego la igual de funciones es una igual de conjuntos.

Definición 34 (Dominio y Recorrido de una Función) *Sea f una función real.*
Se define el Dominio de f igual a

$$Dom f = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ (\exists y \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}.$$

Se define el Recorrido de f igual a

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \ \mid \ (\exists x \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}$$

A continuación revisaremos los ejemplos anteriores.

Ejemplo 98 *Determinar dominio y recorrido de*

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

Solución: Sea $x \in Dom(\mathcal{L})$, luego existe $y \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y) \in \mathcal{L}$, es decir,

$$2x + 3y = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$y = \frac{1 - 2x}{3}.$$

De lo anterior tenemos que:

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $y = \frac{1-2x}{3} \in \mathbb{R}$ tal que

$$2(x) + 3\frac{1 - 2x}{3} = 1,$$

de lo cual, $(x, \frac{1-2x}{3}) \in \mathcal{L}$.

Luego

$$Dom\mathcal{L} = \mathbb{R}$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$, luego $x = \frac{1-3y}{2}$ el cual es un número real, por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Rec\mathcal{L} = \mathbb{R}$$

□

Ejemplo 99 *Determinar dominio y recorrido de la siguiente función*

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

Solución: Sea $x \in Dom(f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, luego existe $y \in \mathbb{R}^-$ tales que $(x, y) \in f$, es decir,

$$y^2 - 3x^2 = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} y^2 &=& 1 + 3x^2. \\ y^2 &=& 1 + 3x^2. \\ |y| &=& \sqrt{1 + 3x^2} \\ y &=& -\sqrt{1 + 3x^2}, \quad y < 0 \end{array}$$

De lo anterior tenemos que:

Dado $x \in \mathbb{R}_0^+$ existe $y = -\sqrt{1 + 3x^2} \in \mathbb{R}^-$ tal que

$$(-\sqrt{1 + 3x^2})^2 - 3(x)^2 = 1,$$

es decir, $(x, -\sqrt{1 + 3x^2}) \in f$.

Luego

$$Domf = \mathbb{R}_0^+$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} y^2 - 3x^2 & = & 1 \\ 3x^2 & = & y^2 - 1 \quad (*) \\ |x| & = & \sqrt{\dfrac{y^2-1}{3}} \\ x & = & \sqrt{\dfrac{y^2-1}{3}}, \quad x \geq 0 \end{array}$$

luego la restricción $(*)$ esta dada por $y^2 - 1 \geq 0$, por lo tanto $|y| \geq 1$ con lo cual $y \leq -1$. De este modo $x = \sqrt{\frac{y^2-1}{3}}$ es un número real y por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Recf =]\infty, -1]$$

□

Ejemplo 100 *Dada la relación $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(x-4) = 2x+5\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*
Determine el dominio y el recorrido de la función.

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $(x,y) \in f$, por lo tanto tenemos

$$y(x-4) = 2x+5$$

Cuando $x \neq 4$ tenemos que existe un único valor de $y = \dfrac{2x+5}{x-4}$

Para $x = 4$, reemplazando y tenemos que $0 = 13$, lo que es una contradicción, luego el dominio de f es $Domf = \mathbb{R} - \{4\}$

Sea $y \in Recf$, luego existe $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $(x,y) \in f$,

$$\begin{array}{rl} y(x-4) = & 2x+5 \\ yx - 4y = & 2x+5 \\ yx - 2x = & 5+4y \\ x(y-2) = & 5+4y \end{array}$$

Para $y = 2$, reemplazamos obtenemos que $0 = 13$, lo es falso.

Por lo cual tenemos que $y \neq 2$, y por ende podemos despejar el valor de:

$$x = \frac{5+4y}{y-2}.$$

Recordemos que $x \in Domf$, para ello notemos lo siguiente

$$\frac{5+4y}{y-2} = 4 \Leftrightarrow 5+4y = 4y-8 \Leftrightarrow 5 = -8$$

es decir,

$$\frac{5+4y}{y-2} \neq 4 \Leftrightarrow 5 \neq -8$$

Luego el recorrido de la función es $Recf = \mathbb{R} - \{2\}$ □

Ejemplo 101 *Dada la función* $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Determine el dominio y el recorrido.

Solución: Ya que $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\}$,
Como la expresión $y = \sqrt{x}$ está bien definida solamente cuando $x \in \mathbb{R}_0^+$.
Luego
$$Domf = \mathbb{R}_0^+.$$
Sea $y \in Recf$, luego existe $x \in Domf = \mathbb{R}_0^+$, tal que $(x, y) \in f$.
$$\begin{array}{rcl} y & = & \sqrt{x} \\ y^2 & = & x \text{ con } x \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$
sabemos que $y^2 \geq 0$ es siempre verdadero.
Por lo tanto el recorrido de f es $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$ □

Ejemplo 102 *Dada la relación* $f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y(x - 1) = x^2 - 1\}$

1. *Para* $A = \mathbb{R}$, *determine si* f *es una función.*

2. *Determine* $A \subseteq \mathbb{R}$ *maximal, tal que* f *es función, además su* $Domf$ *y* $Recf$

Solución: Veremos si es función.
Si $x \neq 1$, tenemos que $y = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$, luego el valor de y es único.
Si $x = 1$, se tiene que $0 = 0$, luego todo los valores de y satisfacen, de otro modo $(1, y) \in f$, para todo $y \in \mathbb{R}$, por ende no es función.
El conjunto maximal tal que f es función esta dado por $A = \mathbb{R} - \{1\}$, y en este caso el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Para determinar el recorrido, sea $y \in Recf$, con $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, tal que $(x, y) \in f$, luego tenemos que
$$\begin{array}{rl} y = & \frac{x^2-1}{x-1} \\ y = & (x + 1) \\ y - 1 = & x \end{array}$$
Falta analizar que $y - 1 = x \neq 1$, es decir,
$$y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = 2$$
de otro modo
$$y - 1 \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 2$$
Por lo tanto el recorrido de la función es: $\mathbb{R} - \{2\}$. □
Notación: Sea f una función de números real, luego existe el Dominio de f y el Recorrido de f, además a cada $x \in Domf$ existe un único elemento y en el recorrido, el cual denotamos por $y = f(x)$. Luego la función, la podemos codificar del siguiente modo:
$$\begin{array}{rccl} f: & Domf & \longrightarrow & B \\ & \text{variable} & \longmapsto & \text{única valor asociada} \end{array}$$

Donde B es llamado "Conjunto de llegada" y es un subconjunto de los Número Reales que contiene al recorrido, de otro modo $Recf \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, la variable habitualmente empleada es x, por último note que el valor asociado debe pertenecer a B.

En los ejemplos usaremos los ejercicios anteriores.

El ejemplo 98 tenemos que

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1-2x}{3} \end{array}$$

El ejemplo 99 tenemos que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow &]-\infty, -1] \\ & x & \longmapsto & -\sqrt{1 + 3x^2} \end{array}$$

El ejemplo 100 se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(x - 4) = 2x + 5\}.$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x + 5}{x - 4} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & :\mathbb{R} - \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x + 5}{x - 4} \end{array}$$

El ejemplo 101 se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\},$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

El ejemplo 102 se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x - 1) = x^2 - 1, x \neq 1\},$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Observación: La igualdad de funciones corresponde solamente a una igualdad de conjuntos, pero ahora es importante, reentender esta noción de igualdad de funciones con esta nueva notación.

Definición 35 *Dadas dos funciones $f: A \longrightarrow B$ y $g: C \longrightarrow D$ se dice que $f = g$ si y sólo si se cumple que:*

1. $A = C$
2. $(\forall x \in A)(f(x) = g(x))$

o bien, dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, y para cada elemento del dominio tiene idénticas imágenes.

Ejemplo 103 *Sean* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ *y* $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x}{x} \end{array}$
En este caso tenemos que $f \neq g$ ya que $Dom f \neq Dom g$.

3.2.1. Ejercicios Resueltos

Ejemplo 104 *Sea* $\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & [1,9[\\ & x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{|x|-2}-1 \end{array}$
Determine el dominio de la función.

Solución: Para determinar el dominio de la función, primero debemos restringirla, es decir, determinar para qué valores de x la imagen son números reales.

$$\begin{array}{rcl} |x|-2 & \geq & 0/+2 \\ |x| & \geq & 2 \\ x \geq 2 & \vee & x \leq -2 \end{array}$$

entonces

$$x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$$

Como la función tiene como conjunto de llegada el intervalo $[1,9[$, debemos encontrar los valores de x para los cuales la imagen está en este conjunto.

$$\begin{array}{rcl} y \in [1,9[& \Leftrightarrow & 1 \leq y < 9 \\ \sqrt{|x|-2}-1 \in [1,9[& \Leftrightarrow & 1 \leq \sqrt{|x|-2}-1 < 9/+1 \\ & \Leftrightarrow & 2 \leq \sqrt{|x|-2} < 10/()^2 \\ & \Leftrightarrow & 4 \leq |x|-2 < 100/+2 \\ & \Leftrightarrow & 6 \leq |x| < 102 \end{array}$$

Luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} 6 \leq |x| & \Leftrightarrow & x \leq -6 \vee 6 \leq x \\ |x| < 102 & \Leftrightarrow & -102 < x \wedge x < 102 \end{array}$$

De lo cual tenemos

$$x \in]-102, -6] \cup [6, 102[.$$

Entonces el dominio de f

$$Dom(f) = (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[) \cap (]-102, -6] \cup [6, 102[)$$

Por lo tanto

$$Dom(f) =]-102, -6] \cup [6, 102[.$$

□

Ejemplo 105 *Sea* $\begin{array}{rcl} f: \ ]-\infty, -2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1. \end{array}$

Determine el recorrido de f.

Solución: Sean $x \in]-\infty, -2[$ e $y \in Recf$, luego

$$\begin{array}{rll} y = & f(x) & \\ y = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1 & / - 1 \\ y - 1 = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} & /()^2, \ y - 1 \geq 0 \\ (y-1)^2 = & \frac{1}{|x|-1} & \\ |x| - 1 = & \frac{1}{(y-1)^2} & / + 1, \ y \neq 1 \\ |x| = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & \end{array}$$

Como $x \in]-\infty, -2[$, tenemos que $|x| = -x$ y nos queda

$$\begin{array}{rll} -x = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & / \cdot (-1) \\ x = & -1 - \frac{1}{(y-1)^2} & \end{array}$$

por otro lado tenemos que $x \leq -2$, entonces

$$\begin{array}{rll} -1 - \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -2 & \Leftrightarrow \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -1 & / \cdot (-1) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{(y-1)^2} \geq 1 & \\ & \Leftrightarrow 1 \geq (y-1)^2 & /\sqrt{} \\ & \Leftrightarrow 1 \geq |y-1| & \\ & \Leftrightarrow -1 \leq y - 1 \leq 1 & \\ & \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2 & \end{array}$$

antes de concluir debemos considerar las anteriores restricciones, luego el recorrido de la función nos queda:

$$Recf = [0, 2] \cap]1, +\infty[=]1, 2].$$

□

Ejemplo 106 *Sea $f(x) = 1 - x - x^2$ una función real. Determine el dominio máximo y su recorrido de f.*

Solución: Como la expresión $f(x) = 1-x-x^2$, siempre esta bien definida o siempre podemos evaluar, luego $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Ahora, para encontrar el recorrido de f. Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & 1-x-x^2 \\ x^2+x+(y-1) & = & 0 \end{array}$$

La cual es una ecuación de segundo grado, para determinar si existe x debemos calcular su discriminante es $1-4(y-1) \geq 0$, luego aplicando la formula de segundo grado tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5-4y}}{2}$$

Entonces, la única restricción es el discriminante

$$\begin{array}{rl} 5-4y & \geq 0 \\ \frac{5}{4} & \geq y \end{array}$$

Luego

$$Rec(f) =]-\infty, \frac{5}{4}]$$

□

Ejemplo 107 *Sea* $\begin{array}{rccl} f: & A \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 2+x & si & x \leq 1 \\ x^2+1 & si & x > 1 \end{array} \right. \end{array}$

Determinar A igual al dominio máximo y el recorrido de la función.

Solución: El dominio máximo de ésta función es $\mathbb{R}$.

Como f es una función definida en tramos, para determinar el recorrido consideraremos primero el tramo en que la función está definida para todos los $x \leq 1$ y la llamaremos f_1, es decir

$$\begin{array}{rccl} f_1 &]-\infty, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2+x \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x \leq 1$, tal que

$$y = 2+x \Leftrightarrow y-2 = x$$

como $x \leq 1$, luego

$$y-2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 3$$

Por lo tanto

$$Rec(f_1) =]-\infty, 3]$$

Ahora veremos que pasa con el recorrido cuando $x > 1$. Llamaremos f_2 al segundo tramo de la función, es decir,

$$\begin{array}{rccl} f_2 &]1, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x > 1$, tal que

$$y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x^2,$$

de lo cual $y - 1 \geq 0$ y $\sqrt{y-1} = |x|$, pero $x > 1$

$$\sqrt{y-1} > 1 \Leftrightarrow y - 1 > 1$$

De este modo tenemos

$$Rec(f_2) =]-\infty, 2[$$

Finalmente el recorrido de la función f es

$$Rec(f) = Rec(f_1) \cup Rec(f_2) =]-\infty, 3]$$

□

3.2.2. Representación Gráfica

La gráfica de una función $f : A \longrightarrow B$, se define como el conjunto de pares ordenados siguiente:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B \mid y = f(x), x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

Note que hemos vuelto a la notación de relación de números reales.

La representación gráfica de f se llama curva y se consigue **marcando** los puntos del conjunto en el plano.

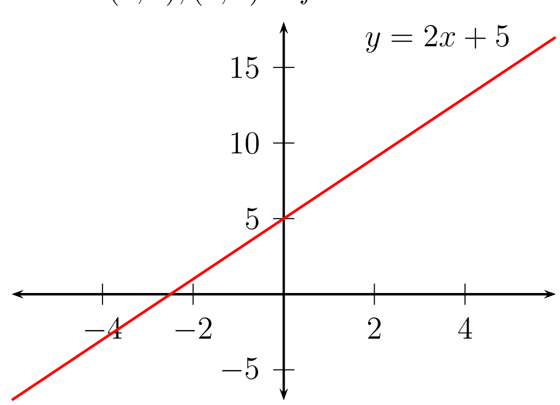
De lo anterior tenemos en el eje X los elementos del dominio y en el eje Y los elementos del conjunto de llegada.

Observación: Se dice que x es un cero de f, si y sólo si $f(x) = 0$. Geométricamente los ceros de una función son los puntos en que la gráfica intersecan o corta al eje X.

Ejemplo 108 *Para $f(x) = 2x+2$, decimos que -1 es un cero de $f(x)$ y por lo tanto el punto $(-1, 0)$ es la intersección con el eje X*

Ejemplo 109 *Graficar la función $f(x) = 2x + 5$.*

Para graficar podemos hacer una tabla en donde representemos a la variable dependiente asignándole valores a la variable independiente y así podemos representar algunos puntos en el plano y conociendo la curva podremos trazarla, en este caso se trata de una recta luego nos bastan dos puntos, ellos son $(0, 5), (1, 7) \in f$.



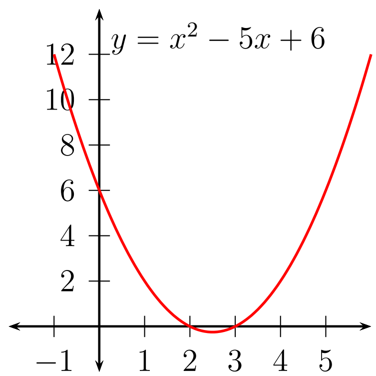
Observación: La gráfica de una función, nos ayuda a poder determinar el dominio y el recorrido de ella

Ejemplo 110 *Graficar la función* $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Para graficar, usamos el hecho que $y = x^2 - 5x + 6$ es una parábola, para determinar los elementos distinguidos completemos cuadrado y obtenemos

$$(x - \frac{5}{2})^2 = 4\frac{1}{4}(y + \frac{1}{4}),$$

cuyo vértice es $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, para tener una mejor gráfica, construyamos una tabla con algunos valores, para ello



x	y
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2

Usando la gráfica podemos constatar que el dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $[-\frac{1}{4}, \infty[$. Revisemos el recorrido para ello consideremos la ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 - y = & \ 0 \\ x = & \ \tfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6-y)}}{2} \\ x = & \ \tfrac{5 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \end{aligned}$$

Luego la única restricción es que el discriminante debe ser no negativo, es decir

$$1 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto el recorrido de f es $[-\frac{1}{4}, \infty[$. $\square$

3.3. Modelación

Modelar matemáticamente una situación de la vida cotidiana se refiere a identificar en un problema una expresión matemática concreta que represente algunos aspecto del problema, de modo que esta expresión nos permita obtener información actual o futura.

Esta expresión matemática puede expresarse mediante un enunciado o mediante una ecuación. En el siguiente ejemplo encontramos una situación la cual se puede modelar mediante una función.

Ejemplo 111 *Cuando hablamos del impuesto a la venta de ciertos artículos, nos referimos a una situación de la vida diaria, la cual podemos modelar de la siguiente forma; si x representa el valor del artículo en pesos y T es el impuesto a la venta del articulo, el cual es de un 19 % sobre el valor de x, entonces podemos expresar T en función de x de la siguiente modo:*

$$T(x) = \frac{19}{100} \cdot x$$

con $x > 0$

Es decir, si tenemos un artículo cuyo valor es de \$200 el impuesto a la venta se puede calcular usando la expresión matemática encontrada:

$$T(200) = \frac{19}{100} \cdot 200 = 38$$

□

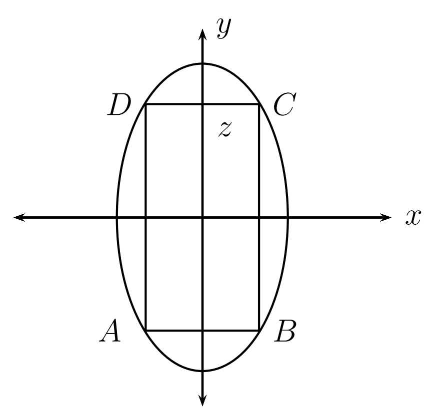
Observación: En el caso que el impuesto esta incluido en el valor, tenemos que la función no es la misma, ya que

$$P = x + 0,19x = 1,19x$$

Luego si pagamos \$200, el costo es $1,19x = 200$, o bien $x = \frac{200}{1,19}$ y el impuesto es $0,19\frac{200}{1,19} \approx 31,9$.

Cuando las personas pagan y le extiende una factura tenemos el primer caso, y el segundo posibilidad es cuando se extiende una boleta, donde no figura los impuestos, sólo el valor final.

Ejemplo 112 *Considere un rectańgulo $ABCD$ con sus lados paralelos a los ejes, inscrito en la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Sea z la distancia entre un lado vertical del rectángulo y el eje y.*



Determine el área del rectángulo en función de z, expresando claramente el dominio.

Solución: El área del rectángulo, es el producto de las longitudes de los lados, para ello sean

$$|\overline{AB}| = 2z \wedge |\overline{BC}| = 2y$$

Luego el área del rectángulo en función de z y de y es la siguiente:

$$A = 2z \cdot 2y = 4zy$$

Como el punto C pertenece a la elipse entonces satisface la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$, despejamos y

$$\begin{array}{rll} 9z^2 + 4y^2 = & 36 & \\ 4y^2 = & 36 - 9z^2 & /(\frac{1}{4}) \\ y^2 = & \frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2 / \sqrt{} & \frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2 > 0 \\ |y| = & \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2} & \\ |y| = & \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9z^2} & \\ |y| = & \frac{1}{2}\sqrt{9(4 - z^2)} & \end{array}$$

Como y es una distancia, entonces el valor es positivo

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2}$$

donde $4 - z^2 > 0$.

Por lo tanto, el área en función de z queda determinada como sigue

$$A(z) = 4z \cdot \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2}$$

$$A(z) = 6z\sqrt{4 - z^2}$$

Ahora veremos cual es el dominio.

$$\begin{array}{rll} 4 - z^2 & \geq 0 & \\ 4 & \geq z^2 & /\sqrt{} \\ 2 & \geq |z| & \end{array}$$

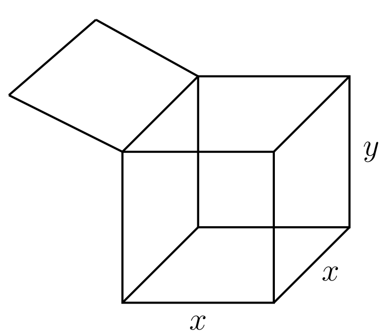
$$-2 \leq z \leq 2$$

Como z es una distancia entonces

$$DomA(z) =]0, 2[.$$

Los extremos no se incluye, ya que las linea, no forma un rectángulo □

Ejemplo 113 *Se desea construir una caja con tapa de base cuadrada con área no mayor de 100 cm^2 como en la figura, de volumen 252 cm^3. Si el costo de la tapa es \$2 por cm^2, la base \$5 por cm^2 y el costo de los lados es de \$3 por cm^2, exprese el costo C como función de x y el dominio de C*



Solución: Dado que el volumen es $V = 252cm^3$, luego $x^2y = 252$, ahora veremos el costo por lado

El costo de la tapa es de \$2 por cm^2. La tapa tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la tapa es $\$2x^2$.

El costo de la base es de \$5 por cm^2. La base tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la base es $\$5x^2$.

El costo de los lados es de \$3 por cm^2. Cada lado tiene $xycm^2$, por lo tanto el costo de los lados es de $\$12xy$.

El costo total de la caja es:

$$C = 2x^2 + 5x^2 + 12xy$$

pero $y = \frac{252}{x^2}$

Entonces la función queda determinada como

$$C(x) = 7x^2 + 12x \cdot \frac{252}{x^2}$$

$$C(x) = 7x^2 + \frac{3024}{x}$$

donde el dominio de C es $]0, 10]$ $\square$

3.3.1. Ejercicios Propuestos

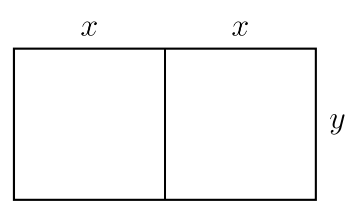
1. Si el radio basal r de un cono circular recto aumenta en un $x\,\%$, mientras que su altura h disminuye en un $20\,\%$ formule una función en términos de x que permita obtener en qué porcentaje varían:

   a) El área basal del cono.

   b) Si el radio aumenta en $15\,\%$ ¿en qué porcentaje varían el área basal y el volumen del cono?

2. Una caja rectangular con la parte superior abierta tiene un volumen de $10m^3$. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de la base tiene un costo de 10 dólares por m^2, el material de las caras laterales tiene un costo de 6 dólares por m^2. Expresar el costo de los materiales en función del ancho de la base.

3. En una parcela, se desea encerrar dos porciones de terreno de igual área (como en la figura) con una malla de longitud L. Expresar el área de la parcela en función de x.



4. El área de una piscina rectangular con bordes es de $18cm^2$. Si el borde superior e inferior miden $\frac{1}{3}m$ y los bordes laterales miden $\frac{1}{4}m$. Expresar el área comprendida entre los bordes en función de uno de los lados de la piscina.

5. La asistencia media en un cine en el que la entrada vale \$1200 es de 100 personas. El empresario cree que cada vez que se reduce el precio en \$80, el número de espectadores aumenta en 20.

   a) Determine la recaudación R en función del precio p.

   b) ¿Qué precio y número de espectadores producirán la mayor asistencia?

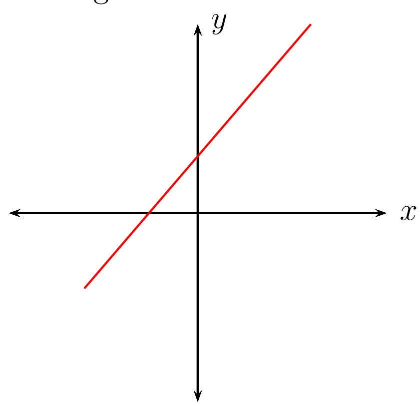
   c) ¿Cuál es la recaudación máxima por sesión?

3.4. Tipos de Funciones

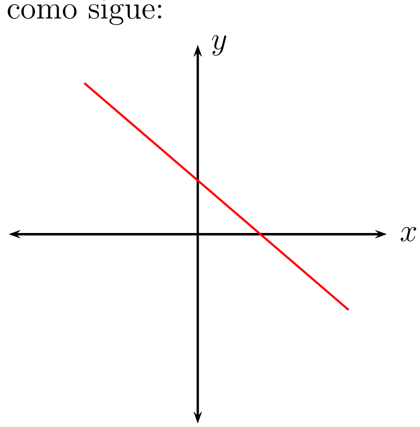
Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow B$ una función real.
Una clasificación de las funciones reales es la siguiente:

Funciones Lineales

Son funciones de la forma $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & mx+b \end{array}$ con $m, b \in \mathbb{R}$.
La gráfica de las funciones lineales, corresponde a una recta de pendiente m.
Si $m > 0$ y $b \neq 0$ su gráfica es la siguiente:



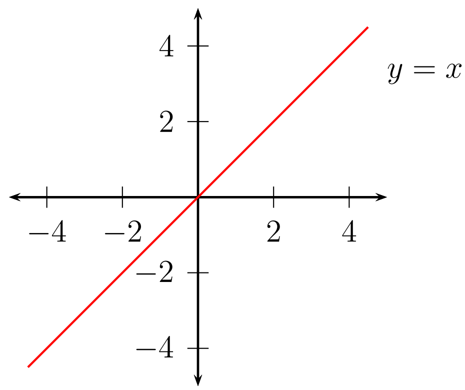
Si $m < 0$ y $b \neq 0$, se gráfica como sigue:



Si $m = 1$ y $b = 0$, entonces llamaremos a esta función Identidad y se define como:

$$\begin{array}{rrcl} Id: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Id(x) = x \end{array}$$

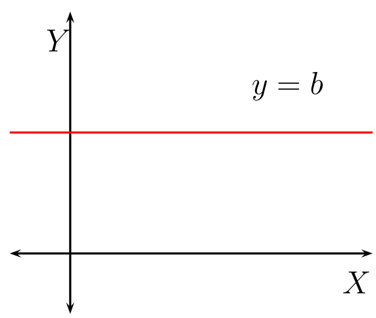
Su gráfica :



Si $m = 0$ y $b \neq 0$,entonces la función se llama función constante b y se denota por

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & b \end{array}$$

Gráficamente:



pendiente igual a 0

Funciones Cuadráticas:

Son funciones del tipo $\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

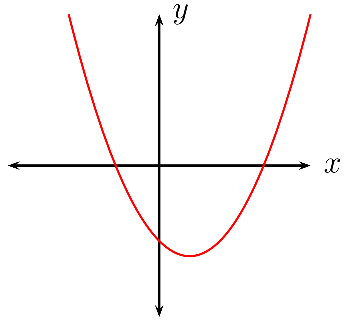
La gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, corresponde a una parábola.

Para conocer la gráfica de una parábola es útil calcular su vértice

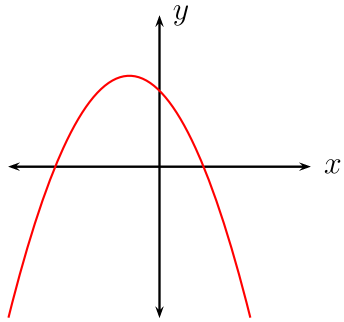
$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a} \right)$$

donde $\triangle = b^2 - 4ac$ es el discriminante de la ecuación de segundo grado y las intersecciones con el eje X, si existen. Lo cual depende del discriminante, su nombre se debe a que discrimina si la ecuación tiene o no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Cuando $a > 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia arriba.



Cuando $a < 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia abajo.

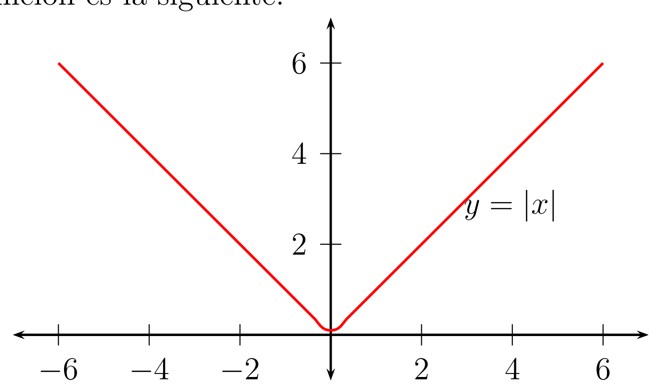


Función Valor Absoluto:

Esta esta dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| = \left\{ \begin{array}{rcl} x & si & x \geq 0 \\ -x & si & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

La gráfica de la función es la siguiente:

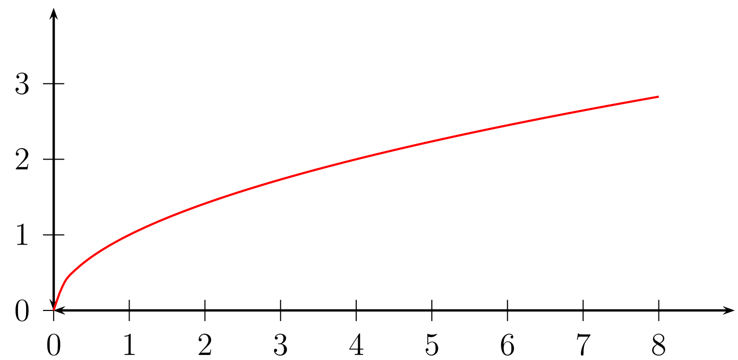


Función Raíz Cuadrada:

Esta función esta dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

La gráfica de la función es la siguiente:

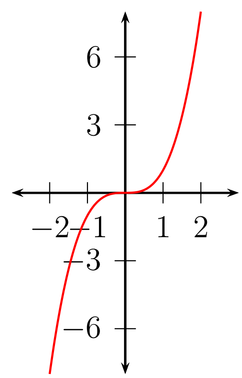


Función Cúbica:

Esta función esta dada por:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

Gráficamente:



Función Parte Entera:

Dado un número real x, se puede descomponer en una suma separando su parte entera

$$[x] = \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} \;\mid\; m \leq x\}$$

luego la parte decimal se define

$$d(x) = x - [x]$$

o bien

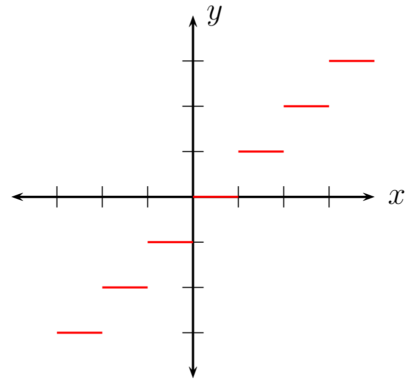
$$x = [x] + d(x)$$

donde $[x]$ es un número entero y $d(x)$ un número decimal, $0 \leq d(x) < 1$.

Luego la función parte entera se define como:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Su gráfica:



3.4.1. Álgebra de Funciones

Definición 36 *Sean f y g funciones tales que $D = Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$ entonces se pueden definir nuevas funciones.*

1.- La suma de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f+g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

2.- La diferencia de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f-g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-g(x) \end{array}$$

3.- El producto de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f\cdot g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}$$

4.- El producto por una escalar se define como:

$$\begin{array}{rccc} \alpha f: & Dom(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{array}$$

5.- Si $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \neq \phi$ entonces cuociente de f con g se define por

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

6.- Sean A, B, C, D subconjuntos de números reales y $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ dos funciones tales que

$$E = \{x \in A \mid f(x) \in C\} \neq \phi.$$

Entonces se define la compuesta de f y g dada por:

$$\begin{array}{rccc} (g\circ f): & E & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Claramente tenemos que $E = Dom(g \circ f)$
Observación: Un caso particular donde ésta definición se cumple, es cuando tenemos que $B \subseteq C$ o $Rec(f) \subseteq C$, entonces $Dom(g \circ f) = Dom(f) = E$

Ejemplo 114 *Sean*

$$\begin{array}{rrcl} f: & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$$

Encontrar la suma, la resta, el producto y el cuociente de f con g.

Solución: El dominio de f es $Dom(f) = [-2,2]$ y el de g es $Dom(g) = \mathbb{R}$.
Luego

$$Dom(f) \cap Dom(g) = [-2,2] \neq \phi$$

La suma de f y g

$$\begin{array}{rrcl} (f+g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} + (3x+1) \end{array}$$

La diferencia

$$\begin{array}{rrcl} (f-g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} - (3x+1) \end{array}$$

El producto

$$\begin{array}{rrcl} (fg): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \cdot (3x+1) \end{array}$$

El cuociente

$$\begin{array}{rrcl} \left(\frac{f}{g}\right): & [-2,2] - \{\frac{-1}{3}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} \end{array}$$

□

Ejemplo 115 *Sea*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Encontrar $f \circ f$, $f \circ f \circ f$

Solución: Sabemos que $Recf \subseteq Domf$, luego $Dom(f \circ f) = Domf$, calculemos ahora la imagen.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

luego tenemos

$$\begin{array}{rrcl} f \circ f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

La otra compuesta la obtenemos

$$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=f(x)=\frac{1}{x}$$

así tenemos

$$\begin{array}{rccl} f\circ f\circ f: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

□

Ejemplo 116 *Sean f y g funciones dadas por*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x+\sqrt{x} \end{array}$$

Determinar $g\circ f$ y $f\circ g$.

Solución: Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Domf \mid f(x)\in Domg\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in\mathbb{R} \mid x-2\in\mathbb{R}^+\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in\mathbb{R} \mid x-2>0\} \\ Dom(g\circ f) & = &]2,+\infty[. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (g\circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(x-2) \\ & = & 5(x-2)+\sqrt{x-2} \\ & = & 5x-10+\sqrt{x-2}. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} g\circ f: &]2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x-10+\sqrt{x-2} \end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl} Dom(f\circ g) & = & \{x\in Domg \mid g(x)\in Domf\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in\mathbb{R}^+ \mid 5x+\sqrt{x}\in\mathbb{R}\} \\ Dom(f\circ g) & = & \mathbb{R}^+. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (f\circ g)(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(5x+\sqrt{x}) \\ & = & 5x+\sqrt{x}-2. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} f\circ g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x+\sqrt{x}-2 \end{array}$$

□

Ejemplo 117 *Sean f y g funciones dadas por*

$$\begin{array}{rccl} f: & [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5-\sqrt{x-1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}+2 \end{array}$$

Determinar $g\circ f$ y $f\circ g$.

Solución: Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Dom f \ \mid\ f(x)\in Dom g\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in[1,\infty[\ \mid\ 5-\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}_0^+\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in[1,\infty[\ \mid\ 5-\sqrt{x-1}\geq 0\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in[1,\infty[\ \mid\ 5\geq\sqrt{x-1}\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in[1,\infty[\ \mid\ 26\geq x\} \\ Dom(g\circ f) & = & [1,26]. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (g\circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(5-\sqrt{x-1}) \\ & = & \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} g\circ f: & [1,26] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2 \end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl} Dom(f\circ g) & = & \{x\in Dom g \ \mid\ g(x)\in Dom f\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in\mathbb{R}_0^+\ \mid\ \sqrt{x}+2\in[1,\infty[\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in\mathbb{R}_0^+\ \mid\ \sqrt{x}+2\geq 1\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in\mathbb{R}_0^+\ \mid\ \sqrt{x}\geq -1\} \\ Dom(f\circ g) & = & \mathbb{R}_0^+. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (f\circ g)(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(\sqrt{x}+2) \\ & = & 5-\sqrt{\sqrt{x}+2-1}. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} f\circ g: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5-\sqrt{\sqrt{x}+1} \end{array}$$

□

Ejemplo 118 *Sean f y g dos funciones definidas por*

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+4 & si & x \in [0,2[\\ x+1 & si & x \in [2,4] \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & [2,12] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & g(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x \in [2,5[\\ 4 & si & x \in [5,12] \end{array} \right. \end{array}$$

Determine $(g \circ f)$

Solución: Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g \circ f) & = & \{x \in Domf \mid f(x) \in Domg\} \\ Dom(g \circ f) & = & \{x \in [0,4] \mid f(x) \in [2,12]\} \end{array}$$

Para el primer caso $x \in [0,2[$ tenemos

$$\begin{array}{r} 2 \leq f(x) \leq 12 \\ 2 \leq 3x+4 \leq 12 \\ -2 \leq 3x \leq 8 \\ -\dfrac{2}{3} \leq x \leq \dfrac{8}{3} \end{array}$$

lo cual ocurre siempre.

Para el segundo caso $x \in [2,4]$ tenemos

$$\begin{array}{r} 2 \leq f(x) \leq 12 \\ 2 \leq x+1 \leq 12 \\ 1 \leq x \leq 11 \end{array}$$

lo cual ocurre siempre. Luego

$$Dom(g \circ f) = [0,4].$$

ahora calcularemos la imagen por la compuesta

Primer caso: Sea $x \in [0,2[$

$$(g \circ f)(x) = g(3x+4)$$

Caso 1A) $3x+4 < 5 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

$$g(3x+4) = (3x+4)^2$$

lo cual esta definida en el intervalo $[0, \frac{1}{3}[$.

Caso 1B) $3x+4 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$$g(3x+4) = 4$$

esta definida en el intervalo de $[\frac{1}{3}, 2[$

Segundo caso: Sea $x \in [2,4]$

$$(g \circ f)(x) = g(x+1)$$

Caso 2A) $x+1 < 5 \Leftrightarrow x < 4$

$$g(x+1) = (x+1)^2$$

en el intervalo $[2,4[$

Caso 2B) $x+1 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 4$, luego $x = 4$

$$g(f(4)) = g(5) = 4$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (3x+4)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 4 & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x < 2 \text{ o } x = 4 \\ (x+1)^2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

$\square$

Ejemplo 119 *Sean f y g dos funciones,*

$$\begin{array}{rcccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & f(x) = & \begin{cases} \sqrt{x-1} & si \quad x > 1 \\ x^3 & si \quad x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & g(x) = & \begin{cases} x^2 & si \quad x > 0 \\ 2x+1 & si \quad x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Determine $(g \circ f)$

Solución: Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g \circ f) & = & \{x \in Domf \mid f(x) \in Domg\} \\ Dom(g \circ f) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \\ Dom(g \circ f) & = & \mathbb{R} \end{array}$$

Veremos a continuación la imagen.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para el primer caso $x > 1$ tenemos

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x-1})$$

pero tenemos que $\sqrt{x-1} > 0$, luego se tiene que:

$$g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x - 1$$

En el segundo caso tenemos que $x < 1$ luego

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3)$$

Debemos analizar

Caso A) $x^3 > 0 \Longleftrightarrow x \in]0,1]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = (x^3)^2 = x^6$$

Caso B) $x^3 \leq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = 2x^3 + 1$$

Así tenemos

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x > 1 \\ x^6 & si \quad x \in]0,1] \\ 2x^3+1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

3.4.2. Ejercicios Propuestos

1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine el conjunto A igual al dominio máximo de f y el recorrido para ese dominio.

    a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

    b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

    c) $f(x) = x^2 + x - 1$

    d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

    e) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{|x|-1}}$

    f) $f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^2}$

2. Dadas las siguientes funciones

    $$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{x^2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rrcl} g: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}$$

    Determine:

    a) $Dom(g \circ f)$

    b) $(g \circ f)(x)$

3. Dadas las siguientes funciones

    $$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{x^2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si \quad |x| \leq 1 \\ x^2+1 & si \quad |x| > 1 \end{cases} \end{array}$$

    Determine $(g \circ f)$

4. Exprese la función $f(x) = \sqrt[5]{(x+x^4)^2}$ como la composición de tres funciones básicas.

5. Encuentre una función $h(x)$ de manera que $(g \circ h)(x) = x$ siendo $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

6. Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ encontrar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

7. Sean f y g funciones tales que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$
Sea
$$A(h) = \frac{f(x+h) - (f \circ g)(x+h)}{(f \cdot g)(x+h) - \frac{f(x+h)}{g(x+h)}}$$

   a) Calcule $A(h)$ en función de h y x.
   b) Calcule $A(1)$ y $A(-1)$.
   c) Graficar la función
$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto |x-1| + |2x+3| \end{aligned}$$

8. Graficar $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

9. Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$ por
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; \ x \geq 1 \\ x^2 - 1 & ; \ x < 1 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; \ x < 2 \\ 2x^2 + x - 3 & ; \ x \geq 2 \end{cases}$$
Encontrar $(g \circ f)(x)$

3.4.3. Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición 37 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función real.*
Se dice que:
a) f es creciente en A si sólo si
$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b))$$
b)f es decreciente en A si sólo si
$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b))$$
c)f es estrictamente creciente en A si sólo si
$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$
d)f es estrictamente decreciente en A si sólo si
$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) > f(b))$$

Ejemplo 120 *La función* $f(x) = \sqrt[n]{x}$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *es estrictamente creciente, pues*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)(x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y})$$

Ejemplo 121 *La función* $f(x) = mx + b$ *es estrictamente decreciente si* $m < 0$.
Sean $u, v \in \mathbb{R}$ *entonces se tiene que:*

$$\begin{array}{rrl} u < v \Longrightarrow & mu & > mv \\ & mu + b & > mv + b \\ & f(u) & > f(v) \end{array}$$

Análogamente si $m > 0$ *entonces* f *es creciente.*

$\square$

Ejercicio 122 *La función* $f(x) = x^2$ *es estrictamente creciente en* $\mathbb{R}^+$ *y la función* $-x^2$ *es estrictamente decreciente en* $\mathbb{R}^+$

Propiedad 51 *Si* f *y* g *son funciones estrictamente crecientes tales que* $Rec(f) \subset Dom(g)$ *entonces* $g \circ f$ *es una función estrictamente creciente definida en* $Dom(f)$.

Demostración: Por definición anterior sabemos que si $Rec(f) \subseteq Dom(g)$ entonces $Dom(g \circ f) = Dom(f)$. Luego sean $x, y \in Dom(g \circ f)$ tales que $x < y$ entonces como f es estrictamente creciente se tiene que

$$f(x) < f(y)$$

y como g también es estrictamente creciente se tiene

$$g(f(x)) < g(f(y))$$

luego

$$x < y \Rightarrow (g \circ f)(x) < (g \circ f)(y)$$

$\square$

Definición 38 (Funciones Monótonas) *Una función* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice monótona si sólo si es creciente o decreciente en el dominio de* f

3.4.4. Funciones Biyectivas

Definición 39 *Una función* $f : A \longrightarrow B$ *se dice que es inyectiva si y sólo si*

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Es decir, f *es inyectiva si y sólo si todo* $y \in Rec(f)$ *tiene una y sólo una preimagen en el* $Dom(f)$.

Ejemplo 123 *Sean a y b en $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y f definida por:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva.

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & ax+b & = & ay+b \\ & \Longrightarrow & ax & = & ay \\ & \Longrightarrow & x & = & y \end{array}$$

Luego f es inyectiva. □

Ejemplo 124 *Sea f una función definida por:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{3x+2}{x-2} \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva.

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}-\{2\}$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & \dfrac{3x+2}{x-2} & = & \dfrac{3y+2}{y-2} \\ & \Longrightarrow & (3x+2)(y-2) & = & (3y+2)(x-2) \\ & \Longrightarrow & 3xy+2y-6x-4 & = & 3xy+2x-6y-4 \\ & \Longrightarrow & 2y-6x & = & 2x-6y \\ & \Longrightarrow & 8y & = & 8x \\ & \Longrightarrow & y & = & x \end{array}$$

Luego f es inyectiva. □

Ejemplo 125 *Sea f una función definida por:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+2x-2 \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva.

Solución: Sean $x, y \in [1,\infty[$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & x^2+2x-2 & = & y^2+2y-2 \\ & \Longrightarrow & x^2-y^2+2x-2y & = & 0 \\ & \Longrightarrow & (x+y)(x-y)+2(x-y) & = & 0 \\ & \Longrightarrow & (x-y)(x+y+2) & = & 0 \\ & \Longrightarrow & x-y=0 & \vee & x+y+2=0 \\ & \Longrightarrow & x=y & \vee & x+y=-2 \end{array}$$

Como $x, y \geq 1$, luego $x+y \geq 2$, por lo tanto, $x+y=-2$ es falso, así tenemos que $x=y$, con lo cual f es inyectiva. □

Ejemplo 126 *Sea la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 2 \\ x+2 & si & x \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva.

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$.
Primer caso: $x, y \in]2, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^2 \\ |x| & = & |y| \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x, y \in]-\infty, 2]$

$$\begin{array}{rcl} x+2 & = & y+2 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero Caso: $x \in]2, \infty[, y \in]-\infty, 2]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x) = f(y)$, para ello calculemos el recorrido.
Si $x > 2$ y $u = f(x)$

$$u = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{u} = x$$

donde $u \geq 0 \wedge \sqrt{u} > 2$, por lo tanto $u > 4$. Así tenemos que $f(x) > 4$,
Si $x \leq 2$ y $v = f(y)$

$$v = y + 2 \Leftrightarrow v - 2 = y$$

donde $v - 2 \leq 2$, por lo tanto $v \leq 4$, con lo cual $f(y) \leq 4$.
Es decir, $4 < f(x) = f(y) \leq 4$. que es imposible, recuerde que $(F \Rightarrow F) \equiv V$, luego en los tres caso la proposición es verdadera. Con lo cual f es inyectiva. □

Ejemplo 127 *Sea la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x-1} & si & x > 1 \\ x^3 & si & x \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva.

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$.
Primer caso: $x, y \in]1, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x-1} & = & \sqrt{y-1} \\ x-1 & = & y-1 \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x, y \in]-\infty, 1]$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero caso: $x \in]1, \infty[, y \in]-\infty, 1]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x) = f(y)$, para ello calculemos el recorrido.

Si $x > 1$ y $u = f(x)$
$$u = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow u^2 + 1 = x$$
donde $u \geq 0 \wedge u^2 + 1 > 1$, por lo tanto $u > 0$. Así tenemos que $Recf_1 =]0, \infty[$.

Si $x \leq 1$ y $v = f(y)$
$$v = y^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{v} = y$$
donde $\sqrt[3]{v} \leq 1$, por lo tanto $v \leq 1$, con lo cual $Recf_2 =]-\infty, 1]$.

Es decir, hay elementos en común en los recorridos, por ejemplo $u = v = \frac{1}{2}$. Así tenemos que $x = \frac{5}{4}, y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, tiene igual imagen. Con lo cual f no es inyectiva. $\square$

Propiedad 52 *Si f es una función estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva.*

Demostración: Supongamos que f es una función estrictamente creciente, es decir:
$$(\forall a, b \in Dom(f))(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$
y supongamos que f no es inyectiva, por lo tanto existirán $a, b \in Dom(f)$ tales que
$$f(a) = f(b) \wedge a \neq b$$
donde
$$a > b \vee a < b (\Rightarrow\Leftarrow)$$
La demostración es análoga si f es estrictamente decreciente. $\square$

Definición 40 *Una función $f : A \longrightarrow B$, se dice* epiyectiva *o* sobreyectiva *si y sólo si $Rec(f) = B$.*

Definición 41 *Una función $f : A \longrightarrow B$, se dice* biyectiva *si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

Propiedad 53 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones. Entonces:*

i) f y g son inyectivas implica que $g \circ f$ es inyectiva.

ii) f y g son sobreyectivas implica que $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración:

i) Sean f y g dos funciones inyectivas y $x_1, x_2 \in Dom(g \circ f) = A$ tales que
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) &= (g \circ f)(x_2) \\ g(f(x_1)) &= (g(f(x_2))) \\ f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$
ya que f y g son inyectivas.

ii) Sean f y g dos funciones epiyectivas luego el $Recf = B$ y $Recg = C$

Sea $x \in C$, como g es sobreyectiva $\exists y \in B$ tal que $g(y) = x$, además f es sobreyectiva, luego $\exists z \in A$ tal que $f(z) = y$. Entonces

$$\begin{aligned} (g \circ f)(z) &= g(f(z)) \\ (g \circ f)(z) &= g(y) \\ (g \circ f)(z) &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto $Rec(g \circ f) = C$, es decir, $g \circ f$ es sobreyectiva. $\square$

Ejemplo 128 *Dada la función g definida por*

$$\begin{aligned} g: \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = \tfrac{x}{x^2+5} \end{aligned}$$

Determinar si g es inyectiva y en caso de que no lo sea redefinir la función para que sea inyectiva.

Solución: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = g(b)$ entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl} g(a) & = & g(b) \\ \frac{a}{a^2+5} & = & \frac{b}{b^2+5} \\ a(b^2+5) & = & b(a^2+5) \\ ab^2+5a & = & ba^2+5b \\ ab^2-ba^2 & = & 5b-5a \\ ab(b-a) & = & 5(b-a) \\ ab(b-a)-5(b-a) & = & 0 \\ (b-a)(ab-5) & = & 0 \\ a=b & \vee & ab-5=0 \end{array}$$

Si $a = 1, b = 5$, tenemos que $f(1) = f(5) = \frac{1}{6}$. Por lo tanto g no es inyectiva.

Luego para redefinir el dominio de g de modo que sea inyectiva, se debe verificar que se cumpla que:

$$a = b \wedge ab \neq 5$$

$$\begin{array}{rcl} a=b & \wedge & (ab>5 \vee ab<5) \\ (a=b \wedge ab>5) & \vee & (a=b \wedge ab<5) \\ a^2>5 & \vee & a^2<5 \\ |a|>\sqrt{5} & \vee & |a|<\sqrt{5} \\ (a>\sqrt{5} \vee a<-\sqrt{5}) & \vee & (-\sqrt{5}<a \wedge a<\sqrt{5}) \\ a \in]-\infty,-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},\infty[& \vee & a \in]-\sqrt{5},\sqrt{5}[\end{array}$$

Pero $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ pertenecen al dominio de inyectividad. Así algunas posibles redefinición de la función

$$\begin{array}{rccc} g_1: & [-\sqrt{5},\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g_2 : \ ]-\infty, -\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g_3 : \ [\sqrt{5}, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+5} \end{array}$$

□

Ejemplo 129 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por*

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -x & si \quad x > 0 \\ x^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva.

Solución:

1. Verificar si f es inyectiva.

   Si $x, y > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \ f(y) \\ -x &= \ -y \\ x &= \ y \end{aligned}$$

   Si $x, y \leq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ f(y) \\ x^2 &= \ y^2 \\ x &= \ y \end{aligned}$$

   Si $x > 0, y \leq 0$ y $f(x) = f(y)$, se tiene que $-x = y^2$ lo cual es una contradicción, pues $-x < 0, y^2 \geq 0$ luego no puede ser que $f(x) = f(y)$, es decir, que si $(F \Rightarrow F) \equiv V$.

   Por lo tanto, f es inyectiva.

2. Verificar si f es sobreyectiva.

   Lo veremos en dos etapas:

   a) Si $x > 0$, se tiene que $f(x) = y = -x$, luego $x = -y \in \mathbb{R}$ y como $x > 0$ entonces $-y > 0$, luego $y < 0$, $Recf_1 =]\infty, 0[$.

   b) Si $x \leq 0$, se tiene que $f(x) = y = x^2 \in \mathbb{R}$ y $|x| = \sqrt{y} \in \mathbb{R} \ \ \forall y \geq 0$ y como $x \leq 0$ entonces $x = -\sqrt{y} \leq 0$, así la única condición para y es que $y \geq 0$, $Recf_2 = [0, \infty[$.

   Luego

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = \mathbb{R}$$

   Por lo tanto f es sobreyectiva.

   En consecuencia, f es biyectiva. □

Ejemplo 130 *Sea* $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x} \end{array}$

a) Determinar si f es inyectiva.

b) Determinar si f es sobreyectiva.

Solución: Verificaremos que f sea inyectiva

$$(\forall a,b\in A)(f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b)$$

Sean $a,b\in Dom f$ tal que

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ \frac{a-1}{a} & = & \frac{b-1}{b} & \\ ba-b & = & ab-a & /-ab \\ -b & = & -a & /\cdot(-1) \\ b & = & a & \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Verificar si f sobreyectiva. Esto sucede si y sólo si

$$Rec(f)=\mathbb{R}-\{1\}$$

Sea $y\in Rec f$, luego existe $x\in Dom f$ tal que

$$\begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & \frac{x-1}{x} \\ xy-x & = & -1 \\ x(y-1) & = & -1 \\ x & = & \frac{-1}{y-1} \end{array}$$

Así tenemos que

$$Rec(f)=\mathbb{R}-\{1\}$$

Por lo tanto f es sobreyectiva. □

3.4.5. Función Inversa

Definición 42 *Sea $f:A\longrightarrow B$ una función, diremos que f es* invertible *si y sólo si existe una función $g:B\longrightarrow A$ tal que*

$$(\forall b\in B)((f\circ g)(b)=b),\ \wedge\ (\forall a\in A)((g\circ f)(a)=a).$$

La función g se llama función inversa *de f y se denota por f^{-1}.*

Propiedad 54 *Sean $f:A\longrightarrow B$ y $g:B\longrightarrow C$ funciones invertibles entonces*

i) $g\circ f$ es una función invertible

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

ii) f^{-1} es una función invertible.

$$(f^{-1})^{-1}=f$$

Demostración: Verifiquemos la primera compuesta

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g(f(x))) \\
&= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) \\
&= f^{-1}(Id(f(x)) \\
&= f^{-1}(f(x)) \\
&= Id(x) \\
&= x
\end{aligned}$$

La otra compuesta

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= (g \circ f) \circ (f^{-1}(g^{-1}(x))) \\
&= g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) \\
&= g(Id(g^{-1}(x))) \\
&= g(g^{-1}(x)) \\
&= Id(x) \\
&= x
\end{aligned}$$

Luego $(g \circ f)^{-1} = Id \quad f^{-1} \circ g^{-1} = Id$
Como $f \circ (f^{-1}) = Id$ y $(f^{-1}) \circ f = Id$, entonces f^{-1} es invertible y además

$$\begin{aligned}
f \circ (f^{-1}) &= Id \\
f \circ (f^{-1}) &= Id / \circ (f^{-1})^{-1} \\
f &= (f^{-1})^{-1}
\end{aligned}$$

Luego

$$h = f = (f^{-1})^{-1}$$

□

Propiedad 55 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función entonces*

$$f \text{ es invertible si y sólo si } f \text{ es biyectiva.}$$

Si f es biyectiva la inversa está definida por

$$\begin{aligned}
f^{-1} : \ B &\longrightarrow A, \\
y &\longmapsto f^{-1}(y)
\end{aligned}$$

donde $f^{-1}(y) = x$ es el único elemento en A, tal que $y = f(x)$.

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que f^{-1} existe, entonces se cumple que $Dom(f^{-1}) = B$ y para todo elemento en su dominio se tiene que, si $x = y$, entonces $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$.

Ahora el $Dom(f^{-1}) = B$ si y sólo si el recorrido de f es igual a B, es decir, f es sobreyectiva.

Demostraremos que f es inyectiva y para esto se debe cumplir que

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in A$ tal que $f(a) = f(b)$ por la primera hipótesis f^{-1} es función. Luego

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f(a)) & = & f^{-1}(f(b)) \\ a & = & b \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Dado $x \in A$, luego $f(x) \in B$ y por lo tanto $x = f^{-1}(f(x))$, con ello f^{-1}es biyectiva.

$\Leftarrow$) Supongamos que f es biyectiva y $f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in f\}$ la relación inversa, por ser f epiyectiva tenemos que $Dom(f^{-1}) = B$, entonces debemos demostrar que si $(x, w) \in f^{-1}$ y $(x, t) \in f^{-1}$ entonces $w = t$.

Como $(x, w) \in f^{-1}$ y $(x, t) \in f^{-1}$ entonces $(w, x) \in f$ y $(t, x) \in f$. Es decir,

$$f(w) = x = f(t)$$

pero f es inyectiva se tiene que

$$w = t$$

$\square$

Observación: Sea $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ una función invertible y $f^{-1} : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ su función inversa, entonces las gráficas $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ son curvas simétricas con respecto a la diagonal $y = x$.

Ejemplo 131 *Sea*

$$\begin{array}{rrl} f: & A \longrightarrow & B \\ & x \longmapsto & \sqrt{x^3 - 1} \end{array}.$$

Determine el dominio máximo de f y el recorrido de modo que sea biyectiva y luego determine f^{-1}.

Solución: La función tiene como dominio el intervalo $[1, \infty[$ pues

$$\begin{array}{rcll} x^3 - 1 & \geq & 0 & \\ x^3 & \geq & 1 & /\sqrt[3]{} \\ x & \geq & 1 & \end{array}$$

Su recorrido queda determinado por

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x^3 - 1} & = & y & /()^2, y \geq 0 \\ x^3 - 1 & = & y^2 & \\ x^3 & = & y^2 + 1 & /\sqrt[3]{} \\ x & = & \sqrt[3]{y^2 + 1} & \end{array}$$

Entonces el recorrido de f es el intervalo $[0, \infty[$.

Ahora debemos verificar si f es inyectiva, para esto se debe cumplir que

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in Domf$ tal que $f(a) = f(b)$ luego

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{a^3-1} & = & \sqrt{b^3-1} & /()^2 \\ a^3-1 & = & b^3-1 & /+1 \\ a^3 & = & b^3 & /\sqrt[3]{} \\ a & = & b & \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Si $B = [0, \infty[$, entonces f es sobreyectiva. De este modo tenemos que f es biyectiva y la inversa de f y queda determinada por

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: & [0,\infty[\longrightarrow & [1,\infty[\\ & x \longmapsto & f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \end{array}$$

$\square$

Ejemplo 132 *Sea*

$$\begin{array}{rcl} f: A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{array}$$

Determine A, B maximales tales exista f^{-1} y en cuyo caso determine

Solución: El dominio de f es el intervalo $]-\infty, 1[$ pues

$$\begin{array}{rcl} 1-x & > & 0 \\ 1 & > & x \end{array}$$

El recorrido de f es

$$\begin{array}{rcll} y & = & \frac{1}{\sqrt{1-x}} & /()^2, y > 0 \\ y^2 & = & \frac{1}{1-x} & \\ y^2 - y^2x & = & 1 & \\ \frac{y^2-1}{y^2} & = & x, & y \neq 0 \end{array}$$

$$Rec(f) =]0, +\infty[$$

Veremos si f es inyectiva.

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ \frac{1}{\sqrt{1-a}} & = & \frac{1}{\sqrt{1-b}} & \\ \sqrt{1-b} & = & \sqrt{1-a} & /()^2 \\ 1-b & = & 1-a & /-1 \\ b & = & a & \end{array}$$

El recorrido ya está calculado y es $Recf =]0, +\infty[$, luego f es sobreyectiva.
En consecuencia f es biyectiva.
Entonces existe la inversa de f y esta dada por:

$$\begin{array}{rl} f^{-1}:]0,+\infty[& \longrightarrow]-\infty, 1[\\ x & \longmapsto f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} \end{array}$$

$\square$

Ejemplo 133 *Sea la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 2 \\ x+2 & si & x \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine la inversa de f.

Solución: Por ejemplo 126 tenemos demostrado que f es biyectiva.

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x} & si & x > 4 \\ x-2 & si & x \leq 4 \end{array} \right. \end{array}$$

□

Definición 43 (Función Periódica de Período p) *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $p > 0$ diremos que f es una función periódica de período p, si y sólo si p es el menor número positivo que cumple*

$$f(x+p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Observación: Con ésta propiedad tenemos que:

$$f(0+p) = f(0) = f(p)$$

$$f(2p) = f(p+p) = f(p)$$

$$f(0) = f(-p+p) = f(-p)$$

Definición 44 (Funciones Pares e impares) *Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $(\forall x \in A)(-x \in A)$ y $f : A \longrightarrow B$ una función. Se dice que*

1. *f es par si y sólo si $(\forall x \in A)(f(-x) = f(x))$*
2. *f es impar si y sólo si $(\forall x \in A)(f(-x) = -f(x))$*

Ejemplo 134 *Dada la función real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 8$. Demostrar que f es una función par.*

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(-x) = 4(-x)^4 - 3(-x)^2 + 8 = 4x^4 - 3x^2 + 8 = f(x)$$

Luego f es una función par. □

Ejemplo 135 *Dada la función real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x$. Demostrar que f es una función impar.*

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(-x) = 3(-x)^5 - 4(-x)^3 + 2(-x) = -3x^5 + 4x^3 - 2x = -f(x)$$

Luego f es una función impar. □

3.4.6. Ejercicios Propuestos

1. Para cada una de las siguientes funciones.

   i) Determine el dominio y el recorrido

   ii) Determine si son inyectivas y sobreyectivas. Si no lo son, redefinirlas, de modo que sean funciones biyectivas.

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

   b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1+|x|}}$

   c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

   e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}+1}$

2. Demuestre que

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^3 \end{array}$$

   es una función inyectiva

3. Sea

$$\begin{array}{rcl} f:]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

   Determine si f es biyectiva.

4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

   a) ¿Es f inyectiva?. Justifique.

   b) Encuentre $f^{-1}(x)$.

   c) Grafique $y = f^{-1}(x)$

5. Sea $f(x) = \frac{5x+3}{x-4}$

   a) Determine si f es una función biyectiva. Justifique.

   b) Si es biyectiva, calcule $f^{-1}(x)$.

6. Sea $f(x) = x^2 + x + 3$. Determine el dominio y recorrido de manera que f sea una función biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 2 + \sqrt{x} & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

   Determine un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que f sea biyectiva.

8. Sean $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3x \end{array}$ y $\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$

   a) Demuestre que g es biyectiva.

   b) Encuentre una función h indicando su dominio tal que $g \circ h = f$.

   c) ¿Es f biyectiva? Si no lo es restringir f de modo que sea biyectiva y encontrar f^{-1}.

3.5. Funciones Exponenciales

Teorema 56 *Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ entonces existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = a^x$$

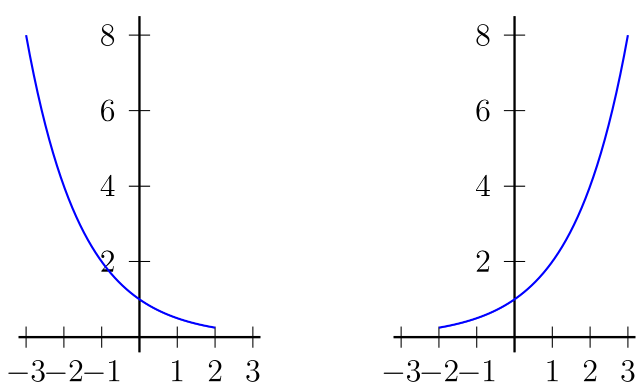
y cumple con las siguientes propiedades.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $x, y, \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $a^0 = 1$
2. $a^{(x+y)} = a^x a^y$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $a^{yx} = (a^x)^y = (a^y)^x$
5. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
6. $(ab)^x = a^x b^x$
7. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
8. *Si $0 < a < 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función decreciente.*
9. *Si $a > 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función creciente*

Definición 45 *Esta función se llama función exponencial en base a y se denota por* $\exp_a$

Su gráfica es la siguiente:



$0 < a < 1$ $a > 1$

Ejemplo 136 *Algunos ejemplos numéricos*

1. $(3^3)(3^4) = 3^{3+4} = 3^7$

2. $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

3. $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

4. $(3^x)^4 = 3^{4x}$

5. $(\frac{1}{3})^{-x} = (3^{-1})^{-x} = 3^x$

□

3.5.1. Funciones Logarítmicas

Teorema 57 *Sea* $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ *entonces la función exponencial en base* a *es biyectiva, por lo tanto existe la función inversa.*

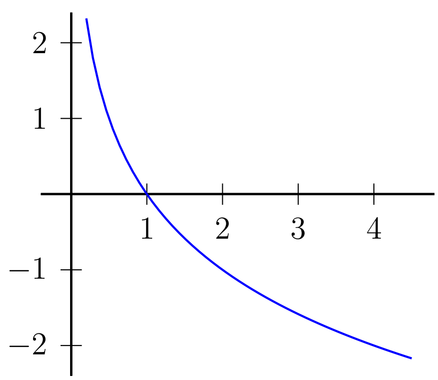
Definición 46 *La función inversa de la exponencial en base* a *se llama función logaritmo en base* a *y la denotaremos como* $\log_a$, *es decir:*

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow \exp_a(y) = x$$

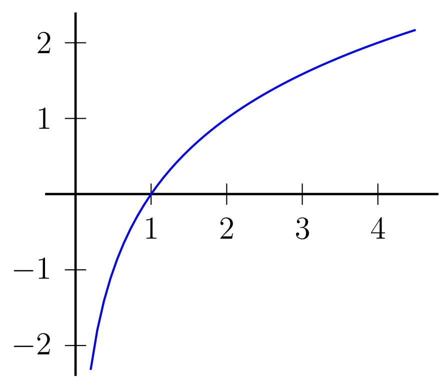
Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ *podemos definir la función como:*

$$\begin{array}{rl} \log_a : & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \log_a(x) = y \end{array}$$

Las Gráfica correspondiente son:



$0 < a < 1$



$a > 1$

Ejemplo 137 *De algunos cálculos numéricos*

1. $\log_{10} 10^3 = 3$, *pues* $10^3 = 1000$

2. $\log_2 1 = 0$, *pues* $2^0 = 1$

□

Propiedad 58 *Sean* $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$ *entonces*

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$
4. $\log_a(1) = 0$
5. $\log_a(a^r) = r$
6. $\log_a(x) = \log_a(y) \Longleftrightarrow x = y$
7. *Si* $0 < a < 1$ *entonces* $\log_a$ *es una función decreciente.*
8. *Si* $a > 1$ *entonces* $\log_a$ *es una función creciente*

Demostración: Sea $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$ entonces $a^u = x$ y $a^v = y$

Para (1) tenemos que

$$\log_a(xy) = \log_a(a^u a^v) = \log_a a^{u+v} = u + v$$

Luego

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

En (2)

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^u a^{-v}) = \log_a a^{u-v} = u - v$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

En (3)

$$\log_a x^r = \log_a(a^u)^r = \log_a a^{ru} = ru$$

$$\log_a x^r = r\log_a x$$

$\square$

Las propiedades siguientes quedan como tarea para el lector.

Ejemplo 138 1. $\log_{10} x^2 y = 2\log_{10} x + \log_{10} y$

2. $\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$

$\square$

Teorema 59 (Cambio de Base) *Sean* $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x \in \mathbb{R},$ *entonces*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostración: Sea $u = \log_a x, v = \log_b x$, entonces $a^u = x$ y $b^v = x$ así tenemos que

$$\begin{array}{rcl} a^u &=& b^v \\ \log_a a^u &=& \log_a b^v \\ u &=& v\log_a b \\ \log_a x &=& \log_b x \log_a b \\ \log_b x &=& \dfrac{\log_a x}{\log_a b} \end{array}$$

□

Ejemplo 139 *Resolver la siguientes ecuaciones*

1. $y = \log_2 8$.

   Luego $2^y = 8$, *por lo tanto* $y = 3$.

2. $\log_a \frac{1}{16} = 4$.

   Lo cual significa que $a^4 = \frac{1}{16}$, *de este modo se tiene* $a = \frac{1}{2}$

3. $\log_a x = -2$.

   Traduciendo tenemos $3^{-2} = y$, *luego* $\frac{1}{9} = y$.

□

3.5.2. Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Una ecuación que contiene una o más funciones logarítmicas con una o más incógnitas se llama ecuación logarítmica. Análogamente para las ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 140 *Resolver la ecuación*

$$\log(x-2) + \log(x+1) + 1 = \log 40$$

Solución: Primeros veremos la restricción, esta son,

$$x - 2 > 0 \wedge x + 1 > 0$$

Entonces $\mathcal{R} = [2, +\infty[$

Ahora despejemos la variable, teniendo presente las propiedades de logaritmo

$$\begin{array}{rcl} \log(x-2) + \log(x+1) + 1 &=& \log 40 \\ \log(x-2) + \log(x+1) + \log 10 &=& \log 40 \\ \log(x-2)(x+1)10 &=& \log 40 \\ (x-2)(x+1)10 &=& 40 \\ (x-2)(x+1) &=& 4 \\ x^2 - x - 6 &=& 0 \\ (x+2)(x-3) &=& 0 \\ x = -2 &\vee& x = 3 \end{array}$$

pero $x = -2$, por restricción no es admisible. Por lo tanto el conjunto solución es $\{3\}$. □

Ejemplo 141 *Resolver la ecuación*

$$\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$$

Solución: Veamos el conjunto restricción

$$4^{x-2} + 9 > 0 \wedge 2^{x-2} + 1 > 0$$

Entonces $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.

Luego resolviendo la ecuación nos queda

$$\begin{array}{rcl} \log 2 + \log(4^{x-2} + 9) & = & 1 + \log(2^{x-2} + 1) \\ \log 2(4^{x-2} + 9) & = & \log 10(2^{x-2} + 1) \\ 2(4^{x-2} + 9) & = & 10(2^{x-2} + 1) \\ 2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 & = & 0 \end{array}$$

Consideremos la variable auxiliar $u = 2^x$, reemplazando obtenemos la ecuación cuadrática.

$$\begin{array}{rcl} u^2 - 20u + 64 & = & 0 \\ (u-16)(u-4) & = & 0 \\ u = 16 & \vee & u = 4 \\ 2^x = 16 & \vee & 2^x = 4 \\ x = 4 & \vee & x = 2 \end{array}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación es $\{2, 4\}$ □

3.5.3. Inecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Debemos tener presente que para resolver inecuaciones con logaritmo o exponenciales es importante recordar que cuando la base es menor que 1, exponencial y logaritmo son decreciente y en el caso que la base sea mayor que 1, se tiene que es creciente.

Ejemplo 142 *Resuelva la siguiente inecuación*

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2 - 4) > -2$$

Solución: El conjunto restricción para la inecuación cumple con:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 4 > 0 & \wedge & \log_5(x^2 - 4) > 0 \\ x^2 > 4 & \wedge & x^2 - 4 > 1 \\ |x| > 2 & \wedge & |x| > \sqrt{5} \end{array}$$

Luego $x \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[= \mathcal{R}$.

Ahora resolvamos la inecuación,

$$\begin{array}{rcl} \log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2 - 4) & > & -2 \ / \exp_{\frac{1}{3}} \downarrow \\ \log_5(x^2 - 4) & < & (\frac{1}{3})^{-2} \ / \exp_5 \uparrow \\ x^2 - 4 & < & 5^9 \\ |x| & < & \sqrt{5^9 + 4} \\ -\sqrt{5^9 + 4} & < x < & \sqrt{5^9 + 4} \end{array}$$

Luego el conjunto solución es:

$$S =]-\sqrt{5^9+4}, \sqrt{5^9+4}[\cap \mathcal{R} =]-\sqrt{5^9+4}, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \sqrt{5^9+4}[.$$

□

Ejemplo 143 *Resolver la inecuación*

$$\log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) \leq 2$$

Solución: El conjunto restricción de la inecuación es $\mathbb{R}^+ - \{\frac{1}{3}\}$

$$\begin{array}{rcl} \log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3(9x)}{\log_3(3x)} + \log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3 9 + \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} + 3\log_3(x) & \leq & 2 \end{array}$$

Sea $u = \log_3 x$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \frac{2+u}{1+u} + 3u & \leq & 2 \\ \frac{2u+3u^2}{1+u} & \leq & 0 \\ \frac{u(2+3u)}{1+u} & \leq & 0 \end{array}$$

Resumamos en una tabla

		-1		$-2/3$		0	
$1+u$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
u	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2+3u$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

Luego tenemos $u \leq -1 \ \vee -\frac{2}{3} \leq u \leq 0$, reemplazando

$$\begin{array}{rcl} \log_3 x \leq -1 & \vee & -\frac{2}{3} \leq \log_3 x \leq 0 \ / \exp_3 \uparrow \\ x \leq 3^{-1} & \vee & 3^{-\frac{2}{3}} \leq x \leq 1 \end{array}$$

Pero, por restricción tenemos que $x > 0$ y $x \neq \frac{1}{3}$ entonces

$$0 < x < \frac{1}{3} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \leq x \leq 1$$

El conjunto solución es

$$S = \left]0, \frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}, 1\right]$$

□

Ejemplo 144 *Resolver la inecuación*

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \leq 2$$

Solución: Primero veremos la Restricciones

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x+1)(x-1) > 0$$

Por lo tanto

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[= \mathcal{R}$$

Veremos los elementos que la satisface

$$\begin{array}{rl} \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) & \leq 2 \;/\exp_{\frac{1}{2}} \downarrow \\ x^2 - 1 & \geq \frac{1}{4} \\ x^2 - \frac{5}{4} & \geq 0 \\ (x - \frac{\sqrt{5}}{2})(x + \frac{\sqrt{5}}{2}) & \geq 0 \end{array}$$

$$x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[= S_1$$

Luego la solución de la inecuación es:

$$S = \mathcal{R} \cap S_1$$

$$x \in \left]-\infty, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

3.5.4. Ejercicios Propuestos

1. Exprese como un solo logaritmo.

   a) $\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\log\frac{1}{2} - \log 15$

   b) $1 + \log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 a^3 - 4\log_3 a^6$

   c) $2\log y - \frac{1}{4}\log(c-x) + \frac{1}{2}\log(x - 2y + c)$

2. Resolver las siguientes ecuaciones.

   a) $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 = 0$

   b) $2^{2x+1} + 2^{x+3} = 10$

   c) $5^{2x+2} + 1 = (10 + 5^x)5^x$

   d) $\dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{1}{3}$

   e) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \left(\dfrac{27}{8}\right)^{(x-1)} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$

   f) $\log x^5 + \log^2 x + 6 = 0$

   g) $(\log_2 x)(\log_2 x + 1) = 2$

h) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$

i) $3\log_5 x-\log_5 32=2\log_{25}(\frac{x}{2})$

j) $\log_5(5^x-7)-\log_{25}324=2-x$

k) $\log\sqrt{7-x})=\log\sqrt{\log(100)+10}-\log\sqrt{x+1}$

l) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x|-1)=2$

m) $\log_{1/3}(x)+\log_9(x)=1$

n) $\log_x(5x^2)(\log_5 x)^2=1$

3. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $a^{x^2}a^x=a^{3x+1}$ con $a\neq 1, a\in\mathbb{R}^+$

b) $a^{x^2+2x}=a^{6x-3}$ con $a\in]1,\infty[$

c) $b^{5x-6}=b^{x^2}$ con $b\in]0,1[$

d) $\dfrac{\log_2 x}{(\log_2 a)^2}-\dfrac{2\log_a x}{\log_{1/2} a}=(\log_{\sqrt[3]{a}} x)(\log_a x)$ con $a\neq 1, a\in\mathbb{R}^+$

e) $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2}+(\log_{2x} 2)(\log_{1/2} 2x)=0$

4. Resolver las siguientes inecuaciones.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)\leq 2$

b) $\log_3(x^2-3x-4)<1$

c) $\log_{\frac{x}{3}}(x(4-x))\leq 1$

d) $\log_4 x+\log_4(x+1)<\log_4(2x+6)$

e) $\log_{1/2} x+\log_{1/2}(2x)>1$

f) $\dfrac{\log_2(x-\frac{1}{2})}{\log_2 x}<2$

g) $\log_9(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1))<0$

h) $7^{2x}-7^{x+1}-8\leq 0$

i) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(x+1))>1$

j) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x|-1)<2$

k) $\log_x(3x-5)<2$

l) $\log_x(3x+5)\leq 2$

m) $\log_{x+3}(x^2-x)<2$

5. Hallar la función inversa de

$$y=\log_b x-\log_b(1+x),\quad b>0$$

6. Demostrar que

$$\log_b(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}) = -\log_b(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})$$

7. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \log_{12} x \left(\dfrac{1}{\log_x 2} + \log_2 y \right) & = & \log_2 x \\ \log_2 x \log_3 (x+y) & = & 3 \log_3 x \end{array}\right|$$

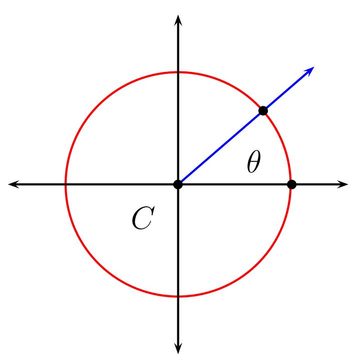
Capítulo 4

Trigonometría

4.1. Introducción

En este capítulo trabajaremos con las funciones trigonométricas que corresponden a la función *seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante*, que en sus inicio estaba definida como proporciones en un triángulo, de este hecho proviene el nombre de trigonometría (medida triángulo)

Un concepto importante para introducir las funciones trigonométricas es el de **ángulo**, que es una figura geométrica plana que consiste en un sector del plano limitado por dos semirectas con el punto extremo en común. Para medir un ángulo, situamos el punto extremo en el centro de circunferencia y uno de los lados en el semi-eje positivo X, decimos que el ángulo es positivo si se mide en sentido del contrario al movimiento del manecillas del reloj en caso contrario negativo.



Existen varias formas de medir un ángulo, entre las más conocida están: *Radianes, Sexagesimal y Centesimal,* cada una de ella consiste en dividir, la circunferencia en 2π, 360 o 400 partes iguales respectivamente.

Propiedad 60 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, donde β es el ángulo medido en grados sexagesimales y α el ángulo medido en radianes entonces*
$$\frac{\beta}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Observación: Por medio de esta relación obtenemos

$$\theta = \frac{180 \cdot \alpha}{\pi} \quad y \quad \alpha = \frac{\pi \cdot \theta}{180}$$

4.2. Funciones Trigonométricas

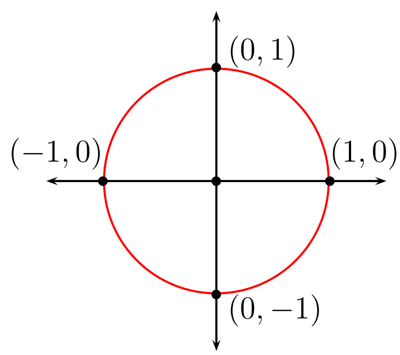
Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia unitaria de centro en el origen, es decir, de centro en $C = (0,0)$ y radio 1, entonces la ecuación que la define está dada por :

$$x^2 + y^2 = 1$$

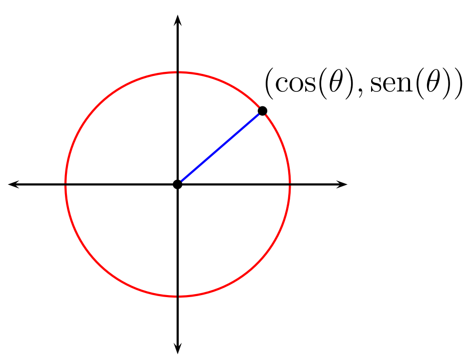
Así tenemos que

$$\mathcal{C} \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Algunos puntos distinguidos de la circunferencia unitaria son $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$



Sea θ un ángulo, ubiquemos el lado inicial en el semieje X, luego el lado final del ángulo θ interseca la circunferencia en un punto, la primera coordenada se denota por $\cos(\theta)$, y la segunda por $\operatorname{sen}(\theta)$.



De esta manera se definen las funciones primera funciones trigonométricas.

Definición 47

1. *La función seno, esta definida por:*

$$\begin{array}{rcccl} \text{sen} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & \theta & \longmapsto & \text{sen}(\theta) \end{array}$$

   donde sen(θ) *representa la segunda coordenada del punto de intersección del lado final del ángulo* θ *con la circunferencia.*

2. *La función coseno, esta definida por:*

$$\begin{array}{rcccl} \cos & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & \theta & \longmapsto & \cos(\theta) \end{array}$$

   donde cos(θ) *representa la primera coordenada del punto de intersección del lado final del ángulo* θ *con la circunferencia.*

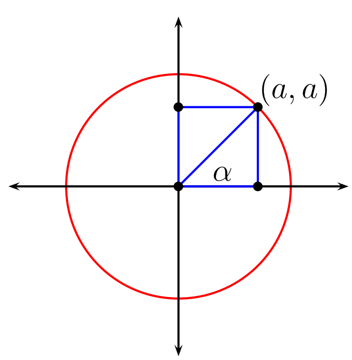
Los puntos distinguidos de la circunferencia nos permiten calcular algunos valores dados a continuación:

$$\begin{array}{ccc} (1,0) & = & \big(\cos(0°), \text{sen}(0°)\big) \\ (0,1) & = & \big(\cos(90°), \text{sen}(90°)\big) \\ (-1,0) & = & \big(\cos(180°), \text{sen}(180°)\big) \\ (0,-1) & = & \big(\cos(270°), \text{sen}(270°)\big) \\ (1,0) & = & \big(\cos(360°), \text{sen}(360°)\big) \end{array}$$

Podemos ordenar estos resultados en la siguiente tabla

Valor de *seno* y *coseno* en ciertos ángulos					
θ	$0° \equiv 0$	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$	$180° \equiv \pi$	$270° \equiv \frac{3\pi}{2}$	$360° \equiv 2\pi$
sen(θ)	0	1	0	-1	0
cos(θ)	1	0	-1	0	1

Otros valores los podemos calcular, al dibujar un cuadrado de lado a en el primer cuadrante.



Como el punto pertenece a la circunferencia tenemos

$$a^2 + a^2 = 1$$

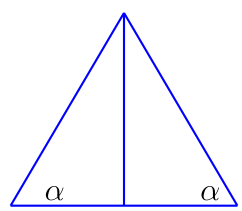
y por lo tanto $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pero además el ángulo α es $\pi/4$, con lo cual tenemos que

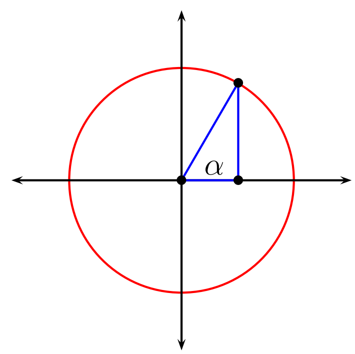
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora bien, este cuadrado lo podemos situar en diferentes cuadrante y ello nos permite calcular otros valores.

Para calcular otro valores usamos una propiedad de los triángulos equiláteros, los ángulos son todos iguales y la alturas son mediana.

Consideremos un triángulo equilátero, con lado de longitud 1 y el ángulo interior $\alpha = 60°$, luego usando pitágoras tenemos que la altura mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$.





Luego ubicamos el triángulo en la circunferencia unitaria y teniendo presentes la longitudes, obtenemos que las coordenadas tiene los siguiente valores:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

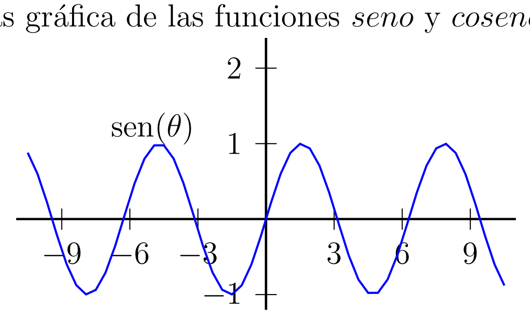
Realizando un reemplazo similar, es decir, mirando el triángulo desde el otro vértice obtenemos

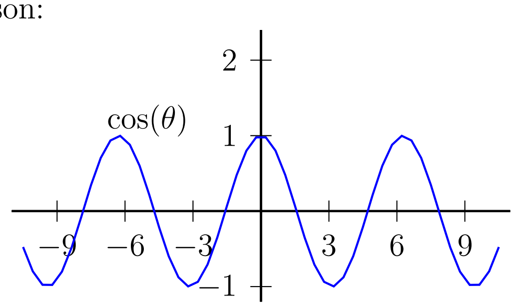
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

como resumen de los valores obtenidos hasta el momento ellos son:

sen	$0° \equiv 0$	$30° \equiv \frac{\pi}{6}$	$45° \equiv \frac{\pi}{4}$	$60° \equiv \frac{\pi}{3}$	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$	$60° \equiv \frac{\pi}{3}$	$45° \equiv \frac{\pi}{4}$	$30° \equiv \frac{\pi}{6}$	$0° \equiv 0$

Las gráfica de las funciones *seno* y *coseno* son:





Observación: Ya que la ecuación de la circunferencia unitaria esta dada por:

$$x^2 + y^2 = 1$$

y además $x = \cos(\theta)$ e $y = \operatorname{sen}(\theta)$, son las coordenada de un punto de la circunferencia, podemos reemplazarlas en la ecuación de la circunferencia y obtenemos

$$(\cos(\theta))^2 + (\operatorname{sen}(\theta))^2 = 1 \tag{4.1}$$

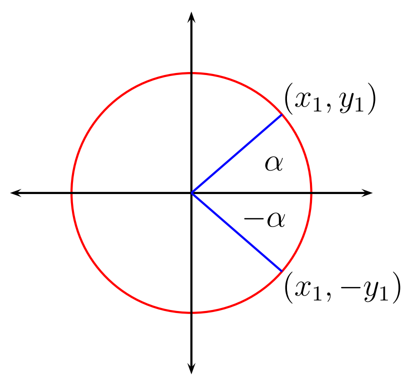
Despejando una de las funciones tenemos en

$$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$$

Obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \cos^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta) & ; & \operatorname{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\ |\cos(\theta)| = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} & ; & |\operatorname{sen}(\theta)| = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \end{array}$$

Observación: La función *seno* es una función impar y la función *coseno* es una función par, para ello sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego consideremos los siguientes valores:



Claramente tenemos que

$$(x_1, y_1) = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)); \quad (x_1, -y_1) = (\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha))$$

de lo cual tenemos que

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$$

Propiedad 61 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos*

1. $\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1$

2. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

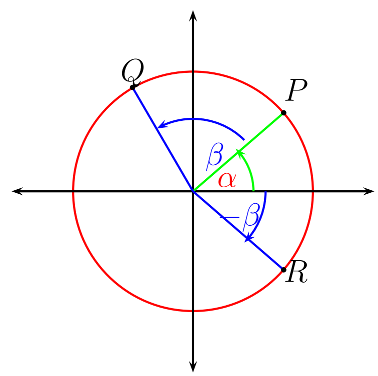
3. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

Definición 48 *Una igualdad funcional que contiene funciones trigonométricas en el dominio común es llamada una **identidad trigonométrica**.*

Teorema 62 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tenemos que:*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, pertenecen a la circunferencia unitaria, tales que α es el ángulo que termina en el segmento $\overline{CP}$ y β que se encuentra entre los segmentos $\overline{CQ}$ y $\overline{CP}$.



Por lo tanto el ángulo que termina en el segmento $\overline{CQ}$ es $\alpha + \beta$ y escogemos R de modo que el ángulo que termina en $\overline{CR}$ es $-\beta$.

Además si tenemos presente que la función *seno* es una función impar y *coseno* una función par. Luego tenemos

$$\begin{aligned} P &= (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) \\ Q &= (\cos(\alpha + \beta), \operatorname{sen}(\alpha + \beta)) \\ R &= (\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta)) = (\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta)) = (\cos(\beta), -\operatorname{sen}(\beta)) \end{aligned}$$

Recordemos que la distancia entre dos puntos esta dada por:

$$dist(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Basándonos en que el arco $\widehat{CQ}$ mide le mismo ángulo que el arco $\widehat{PR}$ de la circunferencia unitaria, luego sus distancia al cuadrado son iguales tenemos $dist^2(C, Q) = dist^2(P, R)$, las veremos por separado

$$\begin{aligned} dist^2(C, Q) &= (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + (0 - \operatorname{sen}(\alpha + \beta))^2 \\ &= 1 - 2\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta) \\ &= 1 - 2\cos(\alpha + \beta) + 1 \end{aligned}$$

Note que $\operatorname{sen}^2(\gamma)+\cos^2(\gamma)=1$.

La otra distancia

$$\begin{aligned}
dist^2(P,R) &= (\cos(\alpha)-\cos(\beta))^2+(\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta))^2\\
&= \cos^2(\alpha)-2\cos(\alpha)\cos(\beta)+\cos^2(\beta)++\operatorname{sen}^2(\alpha)+2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)+\operatorname{sen}^2(\beta)\\
&= -2\cos(\alpha)\cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)+2
\end{aligned}$$

Igualando tenemos

$$\begin{aligned}
dist^2(C,Q) &= dist^2(P,R)\\
2-2\cos(\alpha+\beta) &= -2\cos(\alpha)\cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)+2\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

Además, podemos obtener

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+-\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(-\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot-\operatorname{sen}(\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

□

Corolario 63 *Sea $\beta\in\mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

$$\begin{array}{llll}
1) & \cos(\frac{\pi}{2}+\beta)=-\operatorname{sen}(\beta) & 2) & \cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\operatorname{sen}(\beta)\\
3) & \cos(\pi-\beta)=-\cos(\beta) & 4) & \cos(\pi+\beta)=-\cos(\beta)\\
5) & \cos(\frac{3\pi}{2}+\beta)=\operatorname{sen}(\beta) & 6) & \cos(\frac{3\pi}{2}-\beta)=-\operatorname{sen}(\beta)\\
7) & \cos(2\pi-\beta)=\cos(\beta) & 8) & \cos(2\pi+\beta)=\cos(\beta)
\end{array}$$

La demostración son directa de aplicar la identidad del teorema anterior y los valores conocidos de las funciones y coseno

Teorema 64 *Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^2$ entonces tenemos que:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cdot\cos(\alpha)\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cdot\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Demostración: En la parte (2) del corolario tenemos que $\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\operatorname{sen}(\beta)$, realizando es cambio de variable $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$ tenemos

$$\cos(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Y esto nos permite calcular:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\
&= \cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{sen}(\beta)\\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))\\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(-\beta)+\operatorname{sen}(-\beta)\cos(\alpha)\\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Corolario 65 *Sea $\beta \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

1) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\beta)=\cos(\beta)$	2) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos(\beta)$
3) $\operatorname{sen}(\pi-\beta)=\operatorname{sen}(\beta)$	4) $\operatorname{sen}(\pi+\beta)=-\operatorname{sen}(\beta)$
5) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}+\beta)=-\cos(\beta)$	6) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}-\beta)=-\cos(\beta)$
7) $\operatorname{sen}(2\pi-\beta)=-\operatorname{sen}(\beta)$	8) $\operatorname{sen}(2\pi+\beta)=\operatorname{sen}(\beta)$

Observación: Tenga presente que $\cos(2\alpha)$ es distinto de $2\cos(\alpha)$, de la misma manera $\operatorname{sen}(2\alpha)$ es distinto de $2\operatorname{sen}(\alpha)$, es decir

$$\cos(2\alpha)\neq 2\cos(\alpha) \qquad\qquad \operatorname{sen}(2\alpha)\neq 2\operatorname{sen}(\alpha)$$

lo que si es verdadero es

Propiedad 66 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=1-2\operatorname{sen}^2(\alpha)=-1+2\cos^2(\alpha)$$

Demostración: Sea $\beta \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha)\\
&= \cos(\alpha)\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)\\
&= \cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha) && (1)\\
&= (1-\operatorname{sen}^2(\alpha))-\operatorname{sen}^2(\alpha)\\
&= 1-2\operatorname{sen}^2(\alpha) && (2)
\end{aligned}$$

o de otra forma

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)\\
&= \cos^2(\alpha)-(1-\cos^2(\alpha))\\
&= 1+2\cos^2(\alpha) && (3)
\end{aligned}$$

□

Observación: Para conocer otros valores de las funciones trigonométricas seno, coseno podemos usar las identidades trigonométricas obtenidas.

Ejemplo 145 *Calcule el valor de* $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

Solución: El calculo lo podemos realizar en grados o radianes

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen}(210^\circ) \\
\operatorname{sen}(\pi + \frac{\pi}{6}) &= \operatorname{sen}(180^\circ + 30^\circ) \\
\operatorname{sen}(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})\cos(\pi) &= \operatorname{sen}(180^\circ)\cos(30^\circ) + \operatorname{sen}(30^\circ)\cos(180^\circ)
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}(\pi) = 0$ y $\cos(-1)$ reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi + \frac{\pi}{6}) &= \operatorname{sen}(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})\cos(\pi) \\
&= 0 \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) \cdot -1 \\
&= -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 146 *Calcular*

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Solución: Para ello usamos un desarrollo similar, solo hacemos notar que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Para el otro valor tenemos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

□

Ahora definiremos las otras funciones trigonométricas

Definición 49

1. *La función tangente*

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{tg} & : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \operatorname{tg}(\alpha) := \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{A} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. *La función cotangente se define de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rccc} \cot & : \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \cot(\alpha) := \dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{B} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

3. *La función secante*

$$\begin{array}{rccc} \sec & : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \sec(\alpha) := \dfrac{1}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

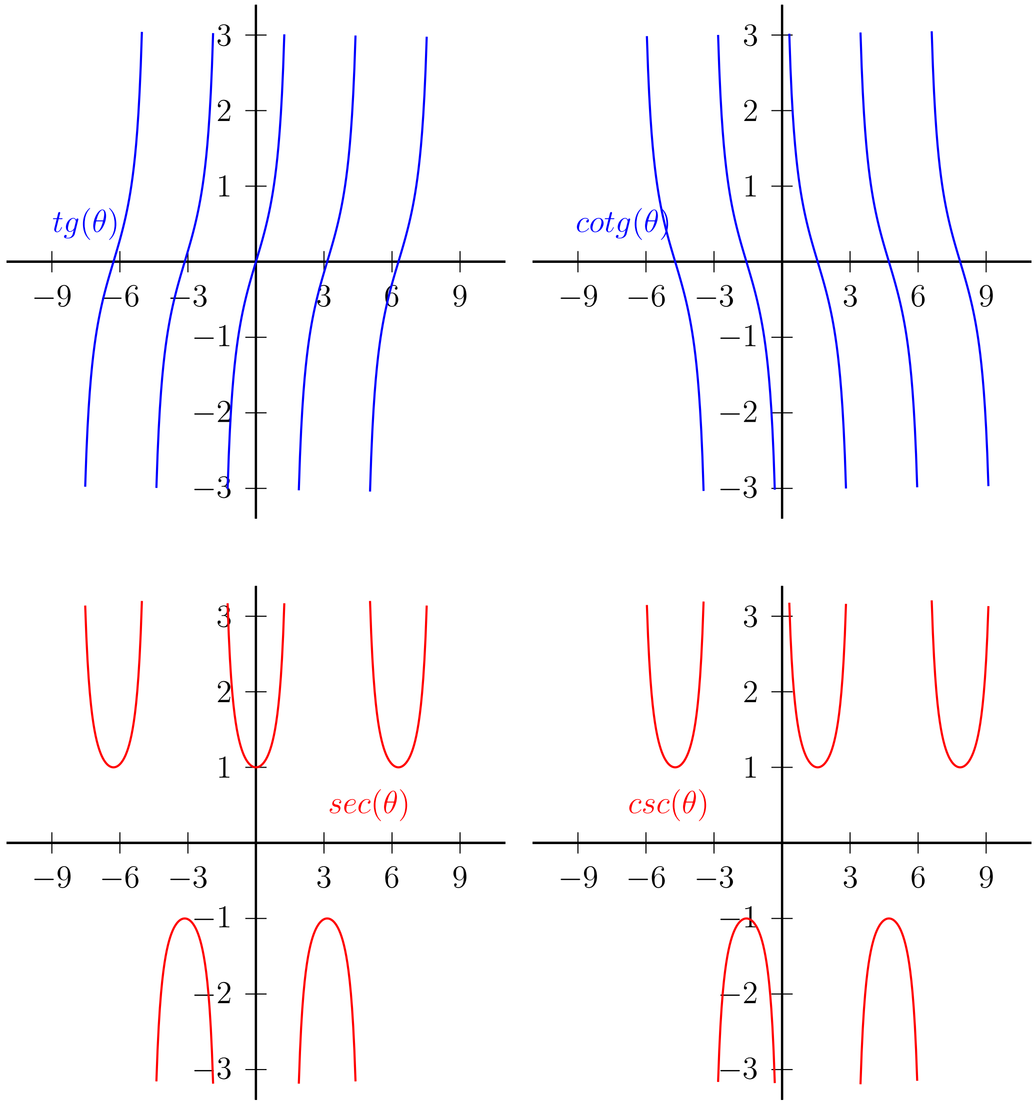
Donde $\mathcal{A} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

4. *Y por último la función cosecante*

$$\begin{array}{rccc} \csc & : \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \csc(\alpha) := \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Las gráficas de esta funciones son las siguientes:



Propiedad 67 *La función tangente al igual que la función seno es una función impar,*

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

además tenemos

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$$

Demostración:

1. Tomemos $\operatorname{tg}(-\alpha)$ tenemos:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

Además podemos obtener la siguiente formula

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}
\end{aligned}$$

Amplifiquemos por $\frac{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\
&= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\frac{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\
&= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}}{1-\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\
&= \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}
\end{aligned}$$

$\square$

Observación: Para conocer el valor en ángulo de las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, nos basta saber su valor en el primer cuadrante, algunos de los cual podemos resumir en la siguiente tabla

Valores de funciones trigonométricas					
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
$\cot(\theta)$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec(\theta)$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	$\nexists$
$\csc(\theta)$	$\nexists$	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

4.2.1. Identidades Trigonométricas

Basándonos en las seis funciones antes definidas *seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante* tenemos la siguiente lista de identidades trigonométricas básicas:

1. $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha)$
3. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha)$
4. $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$
5. $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$
6. $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$
7. $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$
8. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)$
9. $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
10. $\mid \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) \mid = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
11. $\mid \cos(\frac{\alpha}{2}) \mid = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}}$
12. $\mid \operatorname{sen}(\alpha) \mid = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$
13. $\mid \cos(\alpha) \mid = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}$
14. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
15. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
16. $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$
17. $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$
18. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}$
19. $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot(\alpha)\cot(\beta) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$
20. $1 + \cot^2(\alpha) = \csc(\alpha)$
21. $\cot(2\alpha) = \dfrac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}$
22. $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$
23. $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$

24. $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\big]$

25. $\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)-\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\big]$

26. $\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

27. $\operatorname{sen}(\alpha)-\operatorname{sen}(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$

28. $\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

29. $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$

30. $\mid\tan(\frac{\alpha}{2})\mid = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

31. $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

32. $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

Ejemplo 147 *Compruebe la siguiente identidad trigonométrica*

$$\frac{\operatorname{sen}^3(\alpha)+\operatorname{sen}(3\alpha)}{\cos^3(\alpha)-\cos(3\alpha)} = \cot(\alpha)$$

Solución: La justificación la haremos comenzando por el lado izquierdo de la igualdad y obtendremos el lado derecho, para lo cual consideremos lo siguiente, simplifiquemos las expresiones

1.

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\cos(2\alpha)$$

Por identidades 6 y 7 tenemos

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha), \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3\alpha) &= \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\cos(2\alpha) \\ &= \big[2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\big]\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)[\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)] \\ &= 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\big[\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)\big] \end{aligned}$$

2. Por otro lado

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3(\alpha)+\operatorname{sen}(3\alpha) &= \operatorname{sen}^3(\alpha)+2\operatorname{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\big[\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)\big] \\ &= \operatorname{sen}^3(\alpha)+2\operatorname{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^3(\alpha) \\ &= 3\operatorname{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

3.

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)$$

Ocupando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \\
&= \left[\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\right]\cos(\alpha) - \left[2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\right]\operatorname{sen}(\alpha) \\
&= \cos^3(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

entonces

4.

$$\begin{aligned}
\cos^3(\alpha) - \cos(3\alpha) &= \cos^3(\alpha) - \left[\cos^3(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)\right] \\
&= \cos^3(\alpha) - \cos^3(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) + 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= 3\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Tomando en consideración todos los resultados obtenidos y reemplazandolos en lo que deseamos demostrar tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}^3(\alpha) + \operatorname{sen}(3\alpha)}{\cos^3(\alpha) - \cos(3\alpha)} &= \frac{3\operatorname{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)}{3\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)} \\
&= \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \\
&= \cot(\alpha)
\end{aligned}$$

Lo cual concluye la justificación. □

4.2.2. Ejercicios Propuestos

Demostrar las siguientes identidades

1. $\dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)} - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$

2. $\dfrac{\sin(x) + \tan(x)}{\cot(x) + \csc(x)} = \sin(x)\tan(x)$

3. $\dfrac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} - \cot(x) = \csc(x)$

4. $\dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} - \dfrac{1 + \cos(x)}{\sin(x)} = -2\cot(x)$

5. $\dfrac{\cos(x)}{1 - \tan(x)} + \dfrac{\sin(x)}{1 - \cot(x)} = \sin(x) + \cos(x)$

6. $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2$

7. $\dfrac{\cos(3x)}{\sin(x)} + \dfrac{\sin(3x)}{\cos(x)} = 2\cot(2x)$

8. $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \tan(x)$.

9. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

10. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

11. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.

12. $\cot(2x) = \dfrac{\cot^2(x) - 1}{2\cot(x)}$

13. $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x) - 8\sin^3(x)\cos(x)$

14. $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

15. $\cos(3x) + \sin(2x) = \sin(4x) + \cos(3x)(1 - 2\sin(x))$

16. $\sin(3x) - \sin(x) - \sin(5x) = (1 - 2\cos(2x))\sin(3x)$

17. $\tan^2(x) + \sec^2(y) = \sec^2(x) + \tan^2(y)$

18. $\dfrac{\tan(x) + \cot(y)}{\cot(x) + \tan(y)} = \dfrac{\tan(x)}{\tan(y)}$.

4.3. Funciones Trigonométricas Inversas

La existencia de la función inversa para las funciones trigonométricas están basada en el siguiente teorema:

Teorema 68

1. *La función* $\mathrm{sen} : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *es una función biyectiva.*

2. *La función* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *es una función biyectiva.*

3. *La función* $\tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *es una función biyectiva.*

Como las funciones son biyectiva existe su inversa, por razones de no confundir la inversa con las anteriores funciones trigonométricas, es que las inversa se llama usando el prefijo *arco*, ya que es un trozo o un arco de la circunferencia que se considera.

Al igual que con cualquier otra función debe tener cuidado el dominio en que est definida cada una de las funciones inversas

Definición 50

1. *La función arcoseno dada por:* $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *es la función inversa de la función seno*
2. *La función arcocoseno dada por:* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *es la función inversa de la función coseno.*
3. *La función arcotangente dada por:* $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *es la función inversa de la función tangente.*

No olvidemos que, el decir que una función es la inversa de otra, nos entrega información, por ejemplo:

1. $\operatorname{sen}(x) = a$ si y sólo si $x = \operatorname{arcsen}(a)$, con $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a \in [-1, 1]$
2. $\cos(x) = a$ si y sólo si $x = \arccos(a)$, con $x \in [0, \pi], a \in [-1, 1]$
3. $\operatorname{tg}(x) = a$ si y sólo si $x = \operatorname{arctg}(a)$, con $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a \in \mathbb{R}$

Usando lo anterior obtenemos:

Trigonométricas Inversas					
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{arcsen}(a)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos(a)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

4.3.1. Ecuaciones Trigonométricas

El resolver una ecuaciones trigonométricas, al igual que las ecuaciones de funciones de números reales, consiste en determinar todos los valores en el universo (restricción) que al ser reemplazado en la incógnitas satisfacen o cumplen la igualdad.

De otro modo, es resolver una ecuación que contiene al menos una función trigonométrica en cuyo argumento esta la incógnita.

Ejemplo 148 *Resolver*

$$2\sin(x) - 1 = 0$$

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$2\sin(x) - 1 = 0$$

luego despejando obtenemos

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

es decir,

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

□

Para resolver las ecuaciones, recurrimos a la siguiente propiedad.

Propiedad 69 *Sean $x, a \in \mathbb{R}$ entonces:*

1. *Si $a \in [-1, 1]$ entonces*

$$\operatorname{sen}(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = 2k\pi + \operatorname{arc\,sen}(a) \vee x = (2k+1)\pi - \operatorname{arc\,sen}(a))$$

2. *Si $a \in [-1, 1]$ entonces*

$$\cos(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = \arccos(a) + 2k\pi \vee x = -\arccos(a) + 2k\pi)\,.$$

3. *Si $a \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\tan(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = \arctan(a) + k\pi)\,.$$

Para poder entender la resolución de los distintos tipos de ecuaciones con las funciones trigonométricas nos fijaremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 149 *Resolver*

$$5\sin(x) - 3 = 0$$

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$5\sin(x) - 3 = 0$$

luego despejando obtenemos

$$\sin(x) = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$x = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi \vee x = -\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right) + (2k+1)\pi$$

es decir,

$$S = \left\{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right) + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

□

Ejemplo 150 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ constante. Comprueba que la ecuación*

$$\operatorname{sen}(ax) = \cos(bx)$$

tiene como solución

$$(a-b)x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad (a+b)x = \frac{\pi}{2} + 2k''\pi$$

Solución: Sabemos que $\cos(bx) = \sin(\frac{\pi}{2} - bx)$ reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} \sin(ax) &= \cos(bx) \\ \sin(ax) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - bx\right) \end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} \sin(ax) - \sin(\frac{\pi}{2} - bx) &= 0 \\ 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - bx + ax}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - bx - ax}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + (a-b)x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - (a+b)x}{2}\right) = 0$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\pi}{2} + (a-b)x}{2} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad \frac{\frac{\pi}{2} - (a+b)x}{2} = k'\pi \\ (a-b)x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad (a+b)x = \frac{\pi}{2} + 2k''\pi \end{aligned}$$

□

Ejemplo 151 *Resolver*

$$\sin(7x) = \cos(3x)$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sin(7x) &= \cos(3x) \\ \sin(7x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(7x) - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) &= 0 \\ 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x + 7x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x - 7x}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + 2x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{4} - 5x = k\pi \\ x = \frac{(4k+1)\pi}{8} & \qquad \vee \qquad x = \frac{(1-4k)\pi}{10} \end{aligned}$$

$$S = \left\{\frac{(4k+1)\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(1-4k)\pi}{10} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

□

Ejemplo 152 *Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, resolver la ecuación*

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C$$

Solución:

$$\begin{aligned}
A\sin(x) + B\cos(x) &= C \\
\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}$$

Como tenemos que

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$$

luego existe $\alpha \in [0, 2\pi[$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ y } \sin(\alpha) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\
\cos(\alpha)\sin(x) + \sin(\alpha)\cos(x) &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\
\sin(\alpha + x) &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}$$

la ecuación tiene solución si y sólo si $\left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leq 1$ y están dadas por

$$\alpha + x = \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + 2k\pi \vee \alpha + x = -\arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + (2k'+1)\pi$$

□

Ejemplo 153 *Encuentre todas las soluciones para la siguiente ecuación*

$$\sqrt{3}\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x) = 1$$

Solución: Dada $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{3}\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x) = 1$$

luego calculamos $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x) &= 1 \quad /\frac{1}{2} \\
\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Busquemos en una solución de

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \operatorname{sen}(\alpha)=\frac{1}{2}$$

una solución es: $\alpha=\frac{\pi}{3}$, es decir,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) &= \frac{1}{2}\\
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}(2x) &= \frac{1}{2}\\
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ luego $\frac{\pi}{6}=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Por propiedad anterior obtenemos

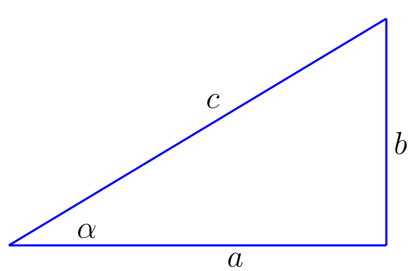
$$\begin{array}{ccc}
\frac{\pi}{3}+2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} & \text{o} & \frac{\pi}{3}+2x=-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\
x=\frac{(12k-1)\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z} & \text{o} & x=\frac{(4k+1)\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}
\end{array}$$

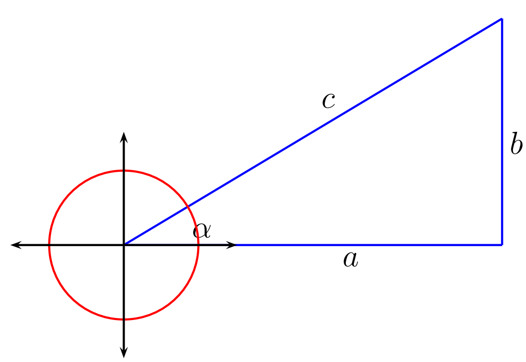
$\square$

4.4. Funciones Trigonométricas en Triángulos

4.4.1. Triángulo Rectángulo

Sean $\alpha, a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tales que son las longitudes de un triángulo rectángulo, y α es el ángulo de unos de los lados como en la figura.





Podemos construir una circunferencia unitaria, con centro en el ángulo α y por Thales tenemos

$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{a}{c} = \frac{cat.ady.}{hip.}$$

donde $cat.ady.$ representa la longitud de cateto adyacente e hip es la longitud de la hipotenusa desde el ángulo α.

Otra proporciones

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{cat.op.}{hip.}$$

donde $cat.op.$ representa la longitud de cateto opuesto e $hip.$ es la longitud de la hipotenusa en el triángulo desde el ángulo α. y también tenemos otra proporciones

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$$

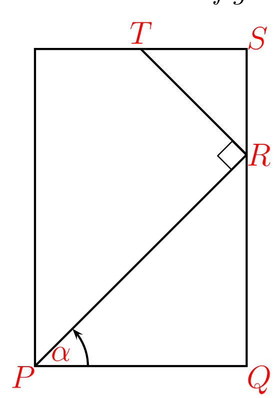
$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{cat.op.}{cat.ady.}$$

La otras funciones las podemos describir por las siguientes proporciones:

$$\cot(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{cat.ady.}{cot.op.} \qquad \sec(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{hip.}{cat.ady.} \qquad \csc(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{hip.}{cat.op.}$$

Los resultados anteriormente obtenidos nos sirven para poder resolver ejercicios como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 154 *En el rectángulo siguiente se ha inscrito la figura*



donde $\overline{RS} = 1cm$, $\overline{RQ} = 2cm$ *y el* $\measuredangle PRT = \frac{\pi}{2}$. *Determine* α *de manera que* $\overline{PR}$ *sea el doble de* $\overline{TR}$.

Solución: De la figura anterior obtenemos

$$\beta = \measuredangle\, TRS = \alpha$$

Luego $\measuredangle\, PRQ = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y $\measuredangle\, TRS = \beta$ de donde tenemos

$$\beta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha \quad = \quad \pi$$

Luego $\beta = \alpha$. Entonces

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{\overline{RS}}{\overline{TR}} = \frac{1}{\overline{TR}}$$

Por lo tanto

$$\overline{TR} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Por otro lado tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{2}{\overline{PR}}$$

De lo cual

$$\overline{PR} = \frac{2}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

Como debe tenerse que $\overline{PR} = 2\overline{TR}$ obtenemos

$$\frac{2}{\operatorname{sen}(\alpha)} = 2\frac{1}{\cos(\alpha)} \quad \text{de lo cual,} \quad \tan(\alpha) = 1$$

De este modo tenemos $\alpha = \frac{\pi}{4}$. □

4.4.2. Ley del Seno

Sean α, β, γ los ángulos internos de un triángulos arbitrario y a, b, c las longitudes de los lados como en la figura.

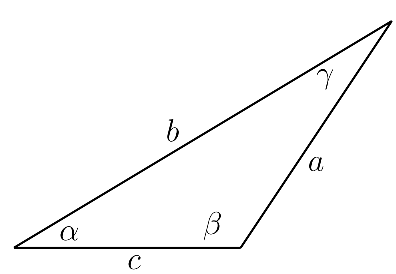
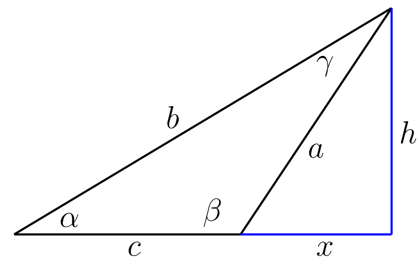


Figura 4.1:

Tracemos una altura en el triángulo



Sabemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{cat.op.}{hip.} = \frac{h}{b}$$

y además

$$\operatorname{sen}(\pi - \beta) = \frac{cat.op}{hip.} = \frac{h}{a}$$

pero

$$\operatorname{sen}(\pi - \beta) = \operatorname{sen}(\beta)$$

Despejando h e igualando tenemos

$$h = b \operatorname{sen}(\alpha) = a \operatorname{sen}(\beta)$$

Por lo tanto

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b}$$

con un proceso similar obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}$$

Igualando las dos expresiones obtenemos el teorema del seno

Teorema 70 (Ley del Seno) *Sean $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, los ángulos interiores, y la longitudes de los lados de un triángulo, como en la figura 4.1*

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}$$

o de igual manera

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

4.4.3. Teorema del Coseno

Sean α, β, γ los ángulos internos de un triángulos arbitrario y a, b, c las longitudes de los lados y además tracemos una altura como en la figura .

Usando el teorema de pitágoras en los triángulos tenemos

$$a^2 = h^2 + x^2$$

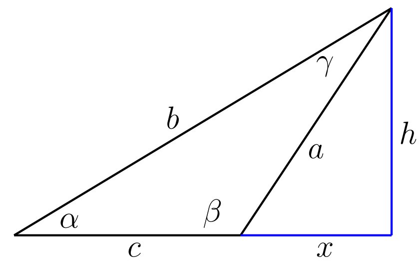


Figura 4.2:

y en el otro tenemos

$$b^2 = h^2 + (c + x)^2$$

desarrollando el cuadrado de binomio,

$$b^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

reemplazando obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$$

En el triángulo rectángulo se tiene

$$-\cos(\beta) = \cos(\pi - \beta) = \frac{x}{a}$$

luego tenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2c(-a\cos(\beta))$$

Teorema 71 (Ley del Coseno) *Sean $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, los ángulos interiores, y la longitudes de los lados de un triángulo, como en la figura 4.2*

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 & = & a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{array}$$

Resolución de Triángulos Es el proceso mediante el cual se obtiene las longitudes de los lados y la medida de los tres ángulos.

Por congruencia de triángulo tenemos que, las únicas cuatro posibilidades en que se obtiene un único triángulo son las siguientes.

1. Dados un lados y dos ángulos.
2. Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
3. Dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor.
4. Dados los tres lados.

Veamos ahora algunos ejemplos de esta situación:

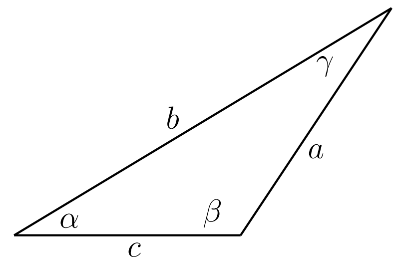


Figura 4.3: Triángulo

Ejemplo 155 (Primer Caso) *Con las notaciones de la figura 4.3, sean a, α, β conocidos. Determinar b, c, γ*

Solución: Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, luego $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.
Además por Ley de los Seno

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}, \qquad \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

de lo cual

$$c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}, \qquad b = \frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

□

Ejemplo 156 (Segundo Caso) *Con las notaciones de la figura 4.3, sean a, b, γ conocidos. Determinar c, α, β*

Solución: Por la ley del Coseno tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

luego

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}$$

Además por Ley de los Seno

$$\sin(\alpha) = \frac{a\sin(\gamma)}{c}$$

tiene dos soluciones menores que 180° y esta son

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right) \qquad \alpha = 180° - \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right)$$

Además

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma,$$

que nos entregan el mismo triángulo. □

Ejemplo 157 (Tercer Caso) *Con las notaciones de la figura 4.3, sean a, c, γ, $a < c$ conocidos.*
Determinar b, α, β

Solución: Por ley del seno y además $\frac{a\sin(\gamma)}{c} < 1$, luego

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right)$$

de lo cual

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

Además por Ley de los Seno

$$b = \frac{c\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

Ejemplo 158 (Cuarto Caso) *Con las notaciones de la figura 4.3, sean a, b, c conocidos. Determinar α, β, γ*

Solución: Por la ley del Coseno tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

luego

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

análogamente

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

□

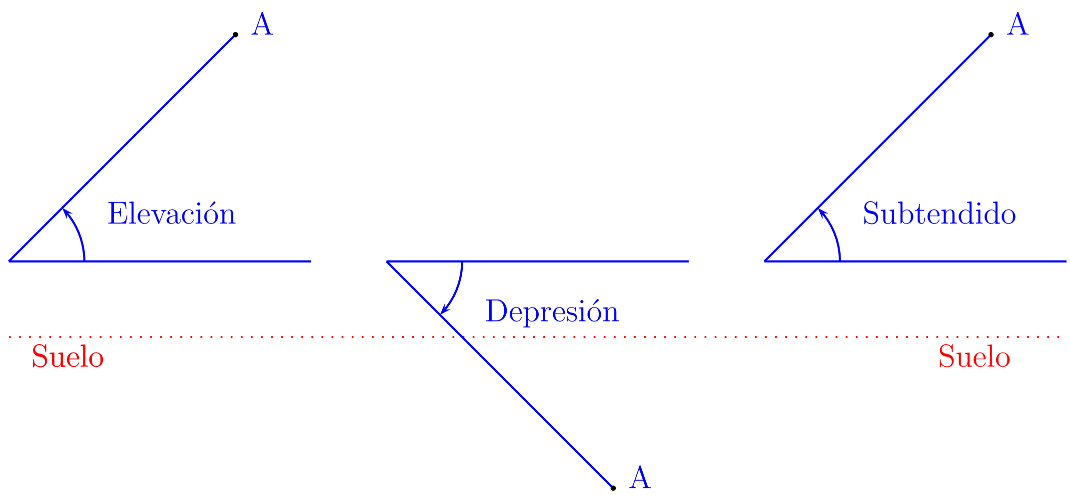
Tipos de ángulos

Para poder resolver algunos problemas de planteo es necesario tener claro algunos términos empleado

ángulo de elevación: Es el ángulo formado por la línea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado sobre el horizonte.

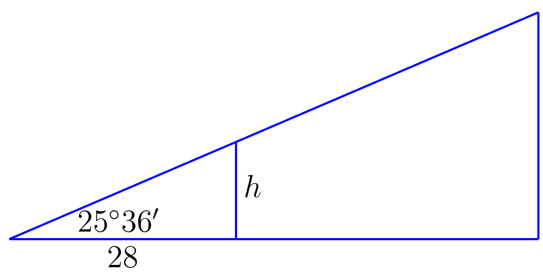
ángulo de depresión: Es el ángulo formado por la linea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado bajo el horizonte.

ángulo subtendido: El ángulo subtendido por un objeto es el ángulo formado por la línea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado.



Ejemplo 159 *Cuando el sol esta a* $25°36'$ *sobre el horizonte un silo da una sombra de* 28 *metros. Calcular la altura del silo.*

Solución: Grafiquemos el problema,



Calculando tangente se obtiene que

$$\tan(25°36') = \frac{h}{28}$$

es decir, $h = 28\tan(25°36') = 28\tan(25,6°) \approx 13{,}4153$. La altura del silo aproximadamente es $13{,}4153 mts$ □

4.5. Ejercicios Propuestos

Valor de la función trigonométrica

Calcule los siguientes valores, expresando el resultado con la función trigonométrica evaluada en un ángulo en $[0, \pi/2]$.

1. $\cos(\frac{109\pi}{30})$
2. $\operatorname{sen}(\frac{109\pi}{30})$

3. $\tan(\frac{163\pi}{90})$
4. $\cot(\frac{272\pi}{45})$
5. $\sec(\frac{109\pi}{30})$
6. $\csc(\frac{163\pi}{90})$
7. $\sec(\frac{272\pi}{45})$
8. $\mathrm{sen}(7\pi)$
9. $\sec(7\pi)$
10. $\tan(9\pi)$

Identidades Trigonométricas

Compruebe las siguientes identidades.

1. $\cos(\alpha)\sec(\alpha) = 1$
2. $\mathrm{sen}(\alpha)\sec(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha)$
3. $\dfrac{\csc(\alpha)}{\sec(\alpha)} = \cot(\alpha)$
4. $(1+\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha)) = \mathrm{sen}^2(\alpha)$
5. $\dfrac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\csc(\alpha)} + \dfrac{\cos(\alpha)}{\sec(\alpha)} = 1$
6. $(\tan(\alpha)+\cot(\alpha))\tan(\alpha) = \sec^2(\alpha)$
7. $\tan(\alpha)\cot(\alpha) = 1$
8. $\cos^2(\alpha) - \mathrm{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
9. $\cos^2(\alpha)(\sec^2(\alpha) - 1) = \mathrm{sen}^2(\alpha)$
10. $1 - 2\,\mathrm{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
11. $(1+\mathrm{sen}(\alpha))(1-\mathrm{sen}(\alpha)) = \dfrac{1}{\sec^2(\alpha)}$
12. $(1-\mathrm{sen}^2(\alpha))(1+\tan^2(\alpha)) = 1$
13. $\dfrac{\mathrm{sen}(\alpha)+\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 1 + \tan(\alpha)$
14. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sen}(\beta) = \cos(\alpha)$
15. $\dfrac{1}{1+\mathrm{sen}(\alpha)} + \dfrac{1}{1-\mathrm{sen}(\alpha)} = 2\sec^2(\alpha)$

16. $\sec^2(\alpha) + \csc^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)\csc^2(\alpha)$

17. $\tan(\alpha) + \cot(\alpha) = \sec(\alpha)\csc(\alpha)$

18. $\dfrac{\cos(\alpha)}{1 - \operatorname{sen}(\alpha)} - \dfrac{1 - \operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\tan(\alpha)$

19. $\cot(2\alpha) = \frac{1}{2}[\cot(\alpha) - \tan(\alpha)]$

20. $\dfrac{\operatorname{sen}^3(\alpha) + \operatorname{sen}(3\alpha)}{\cos^3(\alpha) - \cos(3\alpha)} = \cot(\alpha)$

21. $\csc^4(\alpha) - \cot^4(\alpha) = \csc^2(\alpha)[\operatorname{sen}^2(\alpha) + 2\cos^2(\alpha)]$

22. $\dfrac{1 - \cos(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha)} = \tan(\alpha)$

23. $\tan(\frac{\alpha}{2}) + \cot(\frac{\alpha}{2}) = 2\csc(\alpha)$

24. $\dfrac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \cos(2\alpha)$

25. $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$

26. $\dfrac{2\tan(\alpha)}{\tan(\alpha) + \cot(\alpha)} + \cos(2\alpha) = 1$

27. $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha) - \dfrac{1}{\sec(\alpha)}}{1 - \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)} = \cot(\alpha)$

28. $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$

29. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}$

30. $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\big]$

31. $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big]$

32. $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\big]$

33. $\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\big]$

34. $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

35. $\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$

36. $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

37. $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Ecuaciones Trigonométricas

1. $\operatorname{sen}(\alpha) = 1$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
2. $\operatorname{sen}^2(\alpha) - 2\cos(\alpha) + \frac{1}{4} = 0$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
3. $\cos^2(\alpha) + 2\operatorname{sen}(\alpha) + 2 = 0$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
4. $\sec(\alpha)\cos^2(\alpha) = \sqrt{3}\operatorname{sen}(\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
5. $\operatorname{sen}(5\alpha - \frac{23\pi}{180}) = \cos(2\alpha + \frac{5\pi}{18})$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{20} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
6. $2\csc^2(\alpha) = 3 + \cot^2(\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
7. $3\cos^2(\alpha) = 3 - \operatorname{sen}^2(\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
8. $2(\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)) = 1$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
9. $\sec^2(\alpha) + \tan^2(\alpha) = 7$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
10. $\csc(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cos(\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
11. $\dfrac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \dfrac{1}{2}$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
12. $\dfrac{1}{\cot^2(\alpha) + \frac{1}{\csc^2(\alpha)}} = 2 - \dfrac{1}{\sec^2(\alpha)}$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
13. $1 + \dfrac{1}{\cot^2(\alpha)} = \dfrac{\cot(\alpha)}{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
14. $\operatorname{sen}(\alpha) - \dfrac{1}{\cot^2(\alpha)} = 1$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
15. $\dfrac{2}{\sec^2(\alpha)} = 2 + \dfrac{\tan(\alpha) - \cot(\alpha)}{\tan(\alpha) + \cot(\alpha)}$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
16. $\dfrac{2}{\csc^2(\alpha)} = \dfrac{\cot^2(\alpha) - 1}{1 + \cot^2(\alpha)}$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
17. $\dfrac{2\operatorname{sen}^2(\alpha) - 1}{2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)} = \sec(\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{1258\pi}{1125} + 2k\pi, \frac{4229\pi}{2250} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
18. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\csc(\alpha) - \cot(\alpha)} + \dfrac{1}{\sec(\alpha)} = 2$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
19. $\dfrac{\cot(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)} - \dfrac{1}{1 + \cot(\alpha)} = 2\tan(\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7663\pi}{9000} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
20. $\tan^2(\alpha) = 2\cot^2(\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}]$
21. $\dfrac{1}{\sec^2(\alpha)} - 4\operatorname{sen}^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - 3$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

22. $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

23. $2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = \cos(\alpha)$
$[Resp.\ \alpha \in \{\frac{-3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

24. $-\tan(\alpha) = \cos(2\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{2k\pi, \pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

25. $\sqrt{3}\cos(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha) = 1$ $[Resp.\ \alpha \in \{\frac{-\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

26. $\dfrac{1 - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)} = 1 - \operatorname{sen}(2\alpha)$ $[Resp.\ \alpha \in \{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

27. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) = 2;$ $S_0 = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$

28. $\sin(x)\sec(x) + \sqrt{2}\sin(x) - \sec(x) - \sqrt{2} = 0;$ $S_0 = \{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

29. $\sqrt{3}\sec^2(x) + 2\tan(x) - 2\sqrt{3} = 0;$ $S_0 = \{\frac{2\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$

30. $\tan(x) - \sin(2x) = 0;$ $S_0 = \{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}\}$

31. $\sin(2x) + \sin(4x) = 2\sin(3x);$ $S_0 = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

32. $\tan^2(x) + \sec^2(x) = 7;$ $S_0 = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

33. $\cos(6x) - 3\cos(3x) = -2;$ $S_0 = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Ejercicios de Planteo

1. Desde un barco se observan 2 puntos de la costa en direcciones que forman un ángulo de 135°. Si la distancia desde el barco a cada uno de esos puntos es de 20 y 5 millas, respectivamente, entonces. ¿Cuál es la distancia entre ambos puntos?

   $[Resp.\ 23{,}76 millas]$

2. Desde un vehículo que se desplaza por una carretera en linea recta, se divisa sobre la cima de un cerro, que se encuentra ubicado en la misma dirección del vehículo una antena repetidora de T.V. en un ángulo de elevación de 35°. Momentos antes de entrar al puente y cuando se ha avanzado $0{,}8km$ desde el punto anterior la antena se observa con un ángulo de elevación de 42°. ¿Cuál es la menor distancia la que pasara respecto de la base de la altura?

   $[Resp.\ 3{,}82 mts]$

3. Al poco rato de haber despegado 2 aviones se cruzan en el aire cuando son las $16:00$ hrs. Uno se dirige en linea recta hacia una isla ubicada a 68° al noreste, mientras el otro va a una ciudad ubicada al este. Si el primero se desplaza con una velocidad de 650 km/hrs y el segundo a 820 km/hrs. ¿Qué distancia habrá entre ellos a las $17:15$ hrs?

   $[Resp.\ 1800{,}87 mts]$

4. Durante una carrera de atletismo, 3 jueces A, B, C se ubican en 3 puntos distintos de la pista de forma oval de modo que, medidas las distancias que hay entre ellos de línea recta al juez A dicta $100mts$ de B, este dicta $140mts$ de C, y este ultimo dicta $160mts$ del juez A. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo que se forman al unir los puntos que representan la posición de los jueces?

   [*Resp.* $\alpha = 60°, \beta = 78°5'$ *o* $101°5'$ *y* $\gamma = 41°5'$ *o* $18°5'$]

5. Calcular el ancho de una calle (incluido vereda) si una escalera de $22mts$ de largo al apoyarla contra la pared forma un ángulo de $18°$ con el suelo y al apoyarla contra la pared del frente sin cambiar el punto de apoyo forma un ángulo de $24°$ con el suelo.

   [*Resp.* $20{,}9mts$]

6. ¿A que altura se encuentra un volantín si el hilo que lo sostiene mide $120mts$ y el ángulo de elevación del volantín es de $40°$?

   [*Resp.* $76{,}8mts$]

7. Un observador ve una torre con un ángulo de elevación de $40°$, si se acerca a $100mts$ hacia la torre el ángulo de elevación seria de $62°$. Calcular la altura de la torre si el instrumento que sirvió para medir los ángulos de elevación se encuentra a $1{,}6mts$ del suelo.

   [*Resp.* $150{,}19mts$]

8. El asta de una bandera de $6mts$ de longitud esta ubicado sobre el techo de una casa. Desde un punto en el plano de la base de la casa los ángulos de elevación a la punta y a la base del asta son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente. Hallar la altura de la casa.

   [*Resp.* $8{,}2mts$]

9. El piloto de un avion observa que el ángulo de depresión a una luz situada exactamente abajo de su linea de vuelo es de $\frac{\pi}{6}$. Un minuto mas tarde el ángulo de depresión es de $\frac{\pi}{4}$. Si esta volando horizontalmente a una velocidad de $900km/hrs$. Hallar

   a) La altura a la que esta volando.

   b) La distancia de la luz al primer punto de observación.

   [*Resp.* *a*) $h = 19{,}88km$ *b*) $d = 39{,}76$]

10. Un navío sale exactamente rumbo al este a una velocidad uniforme. A las $7:00$ hrs se observa desde el barco, un faro hacia el norte a $10{,}32$ millas de distancia y a las $7:30$hrs el faro esta a $18°13'$ al oeste del norte. Hallar la velocidad a la que se mueve el navío y el rumbo de este a las $10:00$ horas.

    [*Resp.* $v = 6{,}6\ mill/hrs\ d = 19{,}8\ millas$]

11. Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte situado en una planicie que se encuentra desde una cierto lugar, el fuerte se ve con un ángulo de $10°$ y que desde otro lugar $200mts$ mas cerca del fuerte este se ve con un ángulo de $15°$. ¿Cuál es la altura del fuerte?, ¿Cuál es su distancia del segundo lugar de observación?

[*Resp.* $h = 98{,}22mts \quad d = 377{,}77mts$]

12. Un hombre observa desde un globo que las visuales a las bases de dos torres que están separadas por una distancia de 1 km, medido sobre un plano horizontal forman un ángulo de 70°. Si el observador esta exactamente sobre la vertical del punto medio de la distancia de las dos torres. Calcular la altura del globo.

    [*Resp.* $714{,}28km$]

13. Dos bollos son observados en la dirección sur desde lo alto de un acantilado cuya parte superior esta a $312mts$ sobre el nivel del mar. Hallar la distancia entre los bollos si sus ángulos de elevación medidos desde la punta del acantilado son 46° y 27° respectivamente.

    [*Resp.* $321{,}09mts$]

14. Una escalera de $3mts$ de largo esta apoyada sobre la pared de un edificio estando su base a $1{,}5mts$ del edificio. ¿Que ángulo forma la escalera con el piso?

    [*Resp.* $\frac{\pi}{3}$]

15. Los lados iguales del triángulo isosceles miden $40cm$ cada uno y los ángulos basales son de 25° cada uno. Resolver el triángulo y calcular su área.

    [*Resp.* $604{,}8cm$]

16. Desde una determinada posición de un camino una persona observa la parte mas alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de 25°. Si avanza $45mts$ en linea recta hacia la base de la torre, divisa ahora su parte mas alta con un ángulo de elevación de 55°. Considerando que la vista del observador esta a $1{,}70mts$ del suelo. ¿Cuál es la altura de la torre?

    [*Resp.* $32{,}31mts$]

Índice alfabético

$<$, 23
$\geq$, 23
Ínfimo, 57

Conjunto
    Restricción, 42
    Solución, 42
Conjunto Acotado, 57
    Inferiormente, 56
    Superiormente, 56
Cota
    Inferior, 56
    Superior, 56

Discriminante, 31

Elipse
    Centro, 114
    Eje Focal, 114

Función
    Biyectica, 167
    Dominio, 139
    Epiyectiva, 167
    Igualdad, 144
    Impar, 174
    Inversa, 170
    Invertible, 170
    Inyectiva, 164
    Monotona, 164
    Par, 174
    Periódica, 174
    Recorrido, 139
    Sobreyectiva, 167

Grupo, 6
    Abeliano, 7
    Asociatividad, 6
    Clausura, 6
    Conmutativo, 7
    Inverso, 6
    Neutro, 6

Hipérbola
    Asíntotas, 131
    Centro, 126
    Focos, 124
    Vértices, 126

Método del Absurdo, 8

Parábola
    Directiz, 103
    Eje focal, 103
    Foco, 103
    Tangente, 108
Propiedad
    Tricotomía, 24
Proporción, 17
    Directamente, 18
    Inversamente, 18

Racionalizar, 27
Recta
    Ecuación General, 84
    Ecuación Reducida, 84
    Ecuacion Simétrica, 84
Rectas
    Coincidentes, 88
    Paralelas, 87
    Perpendiculares, 88
Relación, 135
    Dominio, 136
    Inversa, 136
    Recorrido, 136

Supremo, 57