Capítulo 3

Introducción

A Los Circuitos Lógicos

Prof. Eduardo Peña J.

3.0 INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

3.1 RESUMEN

Aquí serán revisados los algunos de los conceptos básicos de lógica, y sugerir algunos links que tratan de métodos y principios usados para distinguir entre el raciocinio correcto y/o incorrecto, uso de lenguajes, formales e informales, diagramas de Venn, tablas de verdad, notación simbólica, deducción de pruebas e inducción. Los links introducen nociones fundamentales y técnicas de lógica formal que pueden ser utilizadas en diferentes áreas. En particular, formar un *background* necesario para otras disciplinas de la Ciencia de la Computación, más allá, claro, de Circuitos Lógicos.

3.2 PROPOSICIÓN

Según Quine, toda proposición es de una frase pero no toda frase es de una proposición; una frase de una proposición es apenas cuando admite uno de los dos valores lógicos: **Falso** (**F**) o **Verdadero** (**V**).

Ejemplos:

1. **Frases que no son proposiciones**
   - Pare!
   - Quiere una cuchara de café?
   - No estoy bien seguro si este color me agrada
2. **Frases que son proposiciones**
   - La luna es el único satélite del planeta tierra (V)
   - La ciudad del Salvador es la capital del estado de Amazonas (F)
   - El número 712 es impar (F)
   - Raíz cuadrada de dos es un número irracional (V)

3.3 COMPOSICIÓN DE PROPOSICIONES

Es posible construir proposiciones a partir de proposiciones ya existentes. Este proceso es conocido por **Composición de Proposiciones**. Suponga que tenemos dos proposiciones,

1. **A = "Maria tiene 23 años"**
2. **B = "Maria es menor"**

Por legislación corriente de un país ficticio, una persona es considerada menor de edad en el caso que tenga menos de 18 años, lo que hace que la proposición **B** sea **F**, en la interpretación de la proposición **A** es **V.**

Veamos algunos ejemplos:

1. **"Maria no tiene 23 años"** (**~ A**)
2. **"Maria no es menor"** (**~ (B)**)
3. **"Maria tiene 23 años"** y **"Maria es menor"** (**A Λ B**)
4. **"Maria tiene 23 años"** o **"Maria es menor"** (**A v B**)
5. **"Maria no tiene 23 años"** y **"Maria es menor"** (**~ (A) Λ B**)
6. **"Maria no tiene 23 años"** o **"Maria es menor"** (**~ (A) v B**)
7. **"Maria tiene 23 años"** o **"Maria no es menor"** (**A v ~ (B)**)
8. **"Maria tiene 23 años"** y **"Maria no es menor"** (**A Λ ~ (B)**)
9. Si **"Maria tiene 23 años"** entonces **"Maria es menor"** (**A => B**)
10. Si **"Maria no tiene 23 años"** entonces **"Maria es menor"** (**~ (A) => B**)
11. **"Maria no tiene 23 años"** y **"Maria es menor"** (**~ (A) Λ B**)
12. **"Maria tiene 18 años"** es equivalente a **"Maria no es menor"** (**C <=> ~ (B)**)

Note que, para componer proposiciones se usan los símbolos **~** (**negación**), **Λ** (**conjunción**), **v** (**disjunción**), **=>** (**implicación**) y, finalmente, **<=>** (**equivalencia**). Son los llamados **conectivos lógicos.** Note, también, que el uso de un símbolo para representar una proposición: **C** representa a proposición **Maria tiene 18 años.** Así, **~(B)** representa **Maria no es menor**, a la vez que **B** representa **Maria es menor.**

3.4 ALGUNAS LEYES FUNDAMENTALES

Ley de la mitad excluida	Una proposición es falsa (**F**) o verdadera (**V**): este es el medio término.
Ley de la Contradicción	Una proposición no puede ser, simultáneamente, **V** e **F**.
Ley de la Funcionalidad	Un valor lógico (**V** o **F**) de una proposición compuesta es únicamente determinada por los valores lógicos de sus proposiciones constituyentes.

Se recomienda, una lectura del Homepage de "Pensamento Crítico da San Jose State University´s" (ver referencias de esta introducción), para que usted comprenda mejor la lógica y su uso. Davide Gries, también, tiene un homepage interesante. En su homepage, hay un link para otras homepage en que Fred B. Schneider, posee un texto que vale a la pena leer, pues trata, específicamente, de una Introducción a la Enseñanza de la Lógica como Herramienta. Hay una frase, en el inicio de este texto diciendo "La lógica es el pegamento que une métodos de raciocinio, en todos los dominios" (**Logic is the glue that binds together methods of reasoning, in all domains**).

3.5 TABLA DE VERDAD

Una tabla de verdad, como se sabe, es un instrumento eficiente para la especificación de una composición de proposiciones. Las tablas siguientes son tablas correspondientes a los conectivos aquí tratados.

Negación	
A	~(**A**), o -**A**, o /**A**, o **A'**
F	V
V	F

A	B	Conjunción AB, o A ∧ B	Disjunción A +B, o A v B	Implicación A => B	Equivalencia A <=> B
F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V

- Una negación, como su propio nombre lo dice, niega una proposición que tiene como argumento. Tiene como símbolo el acento "~" , **~A**,o, algunas veces, una barra sobre la variable lógica, **Ã**, o el signo "-", **-A**, o el símbolo "/", **/A**, o el signo "'", **A'**. Recuerde que el símbolo nada mas es una simples representación de la negación. Lo que es relevante es que el significado del símbolo sea explícitamente declarado. Los símbolos mas usados para la negación son el signo "'", y la barra sobre la variable lógica, $\bar{A}$.
- El símbolo mas utilizado para la conjunción, en Electrónica Digital, es el punto "**.**".
- El símbolo mas utilizado para a disjunción, en Eletrónica Digital, es el signo "**+**".
- Una única función de implicación lógica (**A => B**, donde **A** es el antecedente y **B** es el consecuente) es afirmar el consecuente en caso de que el antecedente sea verdadero. Segundo Quine, la única manera de negarse una implicación lógica como un todo es cuando esto no ocurre, esto es, tiene que ser el antecedente (**A**) **V** y el consecuente (**B**) es **F**. En este caso, una implicación (**A => B**) es **F**. En todos los otros casos es **V**.
- Una equivalencia siempre es **V** cuando los dos argumentos poseen el mismo valor lógico (sea, este valor, **V** o **F**).

3.5.1 PREDICADO EN VEZ DE LA PROPOSICIÓN

En el libro The Science of Programming, Gries extiende el concepto de proposición para contemplar expresiones del tipo,

- **x** > 2;
- 6 < y < 10

Note que, en este caso, el predicado (o composición extendida) solamente tiene valor lógico **V** para algunos valores de la variable **x** (hay casos donde ningún valor de x, en el universo considerado, satisfacen un predicado. Por ejemplo: $x^2 < -29$. Considerando, aquí, el universo como el conjunto de dos números reales). En el primer ejemplo, estábamos trabajando con el conjunto de dos números enteros, cualquier valor de **x** superior a **2**, satisfacen el predicado.

Para practicar un poco sobre el uso de la lógica, las referencias aquí ofrecidas, son suficientes. Otros ejemplos ilustrativos:

Calcule los valores de las variables que satisfacen los respectivos predicados.

- $(x-20)^2 < -29$
- 6 < (y-4) < 10
- 6 - x =>10
- x - 8 =>10 - x

3.6 INTRODUCCIÓN A LOS CIRCUITOS LÓGICOS

Técnica Analógica vs. Técnica Digital

En el vocabulario de la electrónica actual se manejan dos términos muy relacionados y que representan técnicas distintas para resolver procesos electrónicos: Analógico y Digital. La primera denominación se origina en el vocablo griego "ana–logos" y que puede traducirse como "relación exacta"; la segunda se basa en el vocablo del latín "digitus" y que se traduce como "dedo".

Un ejemplo práctico destinado a graficar lo señalado precedentemente es el siguiente: Un Multímetro o Tester es el instrumento mayoritariamente utilizado en electrónica para medir parámetros eléctricos básicos y del cual existen dos versiones: el analógico, que señala las magnitudes medidas mediante el desplazamiento de una aguja, y el digital, que entrega el resultado numéricamente a través de un display. Obviamente ambos son los mejores representantes que podemos señalar para establecer la diferencia entre ambas técnicas.

Técnica Analógica

Dijimos que el multímetro analógico trabaja esplazando una aguja sobre un cuadrante a escala, cuyo trabajo lo efectúa de manera Contínua adoptando cualquier posición entre los extremos de la escala según el nivel de la magnitud medida.

Cuando resulta necesario procesar dos a mas señales (sumar, multiplicar, comp*arar,* etc.), la técnica analógica utiliza como elementos de cálculo magnitudes físicas que en la naturaleza *representan* continuidad en el tiempo. El parámetro o magnitud que realmente interesa -por ejemplo la presión- se simula a través de otra magnitud física, como lo sería mediante el desplazamiento de una aguja sobre el cuadrante de un instrumento, en este caso, un manómetro medidor de presión. Otro ejemplo válido sería la balanza de resorte por todos conocida.

Técnica Digital

Esta técnica hace uso del sistema numérico, es decir, interpreta a través de cifras cualquier resultado. Para el caso del proceso de señales, todos los datos son expresados en cifras y tratados aritméticamente, a lo que es igual, haciendo uso de las cuatro operaciones básicas. A diferencia de la técnica analógica, en que las magnitudes pueden variar continuamente, en la digital los operandos solamente pueden adoptar esta dos absolutamente definidos. Aquí los estados intermedios o indefinidos no tienen sentido alguno -son inadmisibles- como operaciones de cálculos.

Ejemplos

Otros ejemplos muy simples de la vida cotidiana pueden servirnos para establecer la diferencia entre ambas técnicas, por *ejem*plo:

a) Analógico: la luz de día.
Esta *varía* gradualmente durante el transcurso de las horas desde la oscuridad al máximo brillo y luego a la oscuridad.

b) Digital: la luz eléctrica
El acto de encendido y apagado de ella mediante el interruptor.

Tenemos, entonces, por media de ambas disposiciones:

Continua — Analógica
Discreta — Digital

Can los ejemplos precedentes ha quedado claramente explicado y de manera comprensible la diferencia existente entre ambas técnicas.

Actualmente la aplicación de técnicas digitales ha invadido prácticamente todos los campos de la electrónica. En telefonía, por citar un ejemplo, la *voz* está siendo transportada en forma digital, pasando por supuesto par codificadores y decodificadores adecuados.

Todos los espectaculares avances logrados por la técnica digital han sido posible gracias al desarrollo de los circuitos integrados digitales, los que necesitan de una gran cantidad de circuitos lógicos idénticos.

La masificación de estos circuitos integrados llega con la creación de los circuitos lógicos para computadores, en donde desarrollan una serie de acciones de tipo "SI" "NO".

Actualmente el campo de aplicación de los integrados digitales es tan extenso como la electrónica misma, siendo sus aplicaciones, por citar solamente las más relevantes:

- Computadores
- Calculadoras
- Control de procesos
- Aviónica
- Automotriz
- Medicina
- Comunicaciones
- Electrónica de consumo
- Etc

3.7 ALGEBRA DE BOOLE

3.7.1 Definición

Álgebra de Boole o **álgebra Booleana** se le denomina a las reglas algebraicas, basadas en la teoría de conjuntos, para manejar ecuaciones de lógica matemática. La lógica matemática trata con proposiciones, elementos de circuitos de dos estados, etc., asociados por medio de operadores como AND, OR, NOT, IF…THEN, y que, por lo tanto permite cálculos y demostraciones como cualquier parte de las matemáticas. Es llamada así en honor de **George Boole**, famoso matemático, que la introdujo en 1847.

Los dispositivos utilizados para representar los estados lógicos eran conmutadores, núcleos magnéticos, tubos al vacío y relés (conmutadores operados electromagnéticamente)

Los circuitos lógicos que los utilizaron se llamaron "Circuitos de Conmutación". En 1938 el señor **Claude E. Shannon** publicó un artículo en el cual desarrolló un cálculo aplicable a circuitos de conmutación, basado en el álgebra de lógica o álgebra Booleana.

El trabajo de Shannon abordó en horma sistemática el diseño de circuitos lógicos utilizando el álgebra Booleana de dos elementos en las cuales las variables se restringen a sólo 2 valores ("**1**" y "**0**")

Formalmente el Álgebra Booleana de dos elementos puede ser definida como el conjunto S con las operaciones (+,OR), Suma, (*,AND), Producto, y (~ o ', NOT), Inversión o Complemento. Todo esto definido sobre los dos elementos "1", "0" tal que la propiedad de cerrado se cumple para las operaciones dadas sobre los elementos de S.

3.8 POSTULADOS DEL ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

Como en cualquier Álgebra, un conjunto de postulados o asunciones sin probarlos deben ser establecidos inicialmente. A partir de estos postulados pueden ser probados los teoremas o proposiciones del Álgebra de Conmutación.

Postulados:

$x = 0$ si $x \neq 1$	Esto define dos valores para el álgebra booleana.
$x = 1$ si $x \neq 0$	
$0 * 0 = 0$	Estas definen los resultados de las operaciones entre los elementos "1" y "0" pertenecientes a S
$1 + 1 = 1$	
$1 * 1 = 1$	
$0 + 0 = 0$	
$1 * 0 = 0 * 1 = 0$	
$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	
$\overline{0} = 1$	Definen el complemento de los elementos "1" y "0" pertenecientes a S
$\overline{1} = 0$	

Tabla Nº 3.8.1 Postulados del Álgebra de Boole

3.9 TEOREMAS

Existen muchos teoremas en el Algebra de Boole, pero todos ellos se pueden deducir a partir de otros con ayuda de las operaciones y propiedades básicas.

1	$x + 0 = x$	**Identidad con respecto a la "+"**
1ª	$x * 1 = 1$	**Identidad con respecto a la "*"**
2	$1 + x = 1$	**Maximalidad del 1**
2ª	$0 * x = 0$	**Minimalidad del 0**
3	$x + x = x$	**Idempotente con respecto a la "+"**
3ª	$x * x = x$	**Idempotente con respecto a la "*"**
4	$(x)' = x'$	**El complemento de la variable perteneciente a x є S**
4ª	$(x')' = x$	**Involución**
5	$x + x' = 1$	**Complemento con respecto a la "+"**
5ª	$x * x' = 0$	**Complemento con respecto a la "*"**
6	$x + y = y + x$	**Conmutatividad de los elementos x e y con respecto a "+"**
6ª	$x * y = y * x$	**Conmutatividad de los elementos x e y con respecto a "*"**
7	$x + x * y = x$	**Inmersión con respecto a la "+"**
7ª	$x * (x + y) = x$	**Inmersión con respecto a la "*"**
8	$(x + y') * y = x * y$	
8ª	$x * y' + y = x + y$	
9	$x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$	**Propiedad asociativa con respecto a la "+"**
9ª	$x * y * z = (x * y) * z = x * (y * z)$	**Propiedad asociativa con respecto a la "*"**
10	$x * y + x * z = x * (y + z)$	**Propiedad distributiva con respecto a la "+"**
10ª	$(x + y) * (x + z) = x + (y * z)$	**Propiedad distributiva con respecto a la "*"**
11	$(x + y) * (y + z) * (z + x') = (x + y) * (z + x')$	
11ª	$x * y + y * z + z * x' = x * y + z * x'$	
12	$(x + y) * (x' + z) = x * z + x' * y$	
13	$(x + y + z + \ldots\ldots)' = x' * y' * z' * \ldots\ldots$	**Ley de De Morgan con respecto a la "+"**
13ª	$(x * y * z * \ldots\ldots)' = x' + y' + z' + \ldots\ldots$	**Ley de De Morgan con respecto a la "*"**
14	$[f(x1,x2,\ldots,xn,+,*)]' = f(x1',x2',\ldots,xn',*,+)$	**Teorema de Shannon (es una generalización de De Morgan)**
15	$f(x1,x2,\ldots,xn) = x1 * f(1,x2,\ldots,xn) + x' * f(0,x2,\ldots,xn)$	
15ª	$f(x1,x2,\ldots,xn) = [x1 + f(0,x2,\ldots,xn)] * [x' + f(1,x2,\ldots,xn)]$	**Teorema de expansión**

A partir del teorema de expansión pueden ser probados cuatro teoremas adicionales:

16	$x1 * f(x1,x2,\ldots,xn) = x1 * f(1,x2,\ldots,xn)$
16a	$x1 + f(x1,x2,\ldots,xn) = x1 + f(0,x2,\ldots,xn)$
17	$x1' * f(x1,x2,\ldots,xn) = x1' * f(0,x2,\ldots,xn)$
17a	$x1' + f(x1,x2,\ldots,xn) = x1' * f(1,x2,\ldots,xn)$

Tabla Nº 3.9.1 Teoremas del Álgebra de

3.10 MÉTODOS PARA DEMOSTRAR TEOREMAS

- Inducción perfecta (Tabla de verdad)
- Aplicando directamente los postulados y teoremas ya probados
- Diagramas de Venn

- **TABLAS DE VERDAD (Representación)**

Son unas representaciones gráficas de todos los casos que se pueden dar en una relación algebraica y de sus respectivos resultados.

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$Z = f\,(X, Y)$

Figura Nº 3.10.1 Representación de una Tabla de verdad

Las **tablas de la verdad** son una herramienta desarrollada por Charles Peirce en los años 1880. Se emplean en la lógica para determinar si una expresión es cierta o si un argumento es válido. Las tablas de la verdad muestran los valores, las relaciones y los resultados posibles de realizar operaciones lógicas a expresiones lógicas.

Las operaciones empleadas son:

(&, AND) = *y*
(o, OR) = *o* incluyente
xor = *o* excluyente
→ = condicional ("si... entonces...")
↔ = bicondicional ("si y sólo si...")

Por ejemplo, para las operaciones con tres variables x AND (y OR z) se obtiene:

x	y	z	y OR z	x AND (y OR z)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Tabla Nº 3.10.1 Ejemplo de tabla de

(En la tabla anterior se ha descompuesto la operación en dos etapas)

- **APLICACIÓN DE POSTULADOS**

Este método consiste en aplicar directamente los postulados y teoremas probados sin utilizar la inducción perfecta

Probar que $\overline{\overline{A}\,B + A\,\overline{B}} = A\ B + \overline{A}\ \overline{B}$

(A’B + A B’)’

= (por el teorema 16 de De Morgan)
(A’B)’(A B’)’

= (por el teorema 16 de De Morgan)
(A’’+ B’)(A’+B’’)

= (por el teorema A’’ = A)
(A + B’) (A’ + B)

= (por el teorema Distributividad)
A A’ + A B + A’B’+ B B’

= (por el teorema A A’ = 0)

Figura Nº 3.10.2 Ejemplo de aplicación de postulados

- **DIAGRAMAS DE VENN**

Hay una caracterización geométrica interesante que permite establecer una correspondencia uno a uno con los conceptos de variables lógicas. Estas representaciones, conocidas como diagramas de Venn, son también útiles al permitir una visualización geométrica de los teoremas del álgebra booleana.

En la Figura 3.10.3 el espacio interior al rectángulo es nuestro universo de interés. Hemos dividido este universo en dos regiones mutuamente excluyentes, las regiones interior y exterior al círculo. Como hay dos regiones y son mutuamente excluyentes, podemos asociarlas a una variable lógica **A**. Asociamos la variable lógica **A** con el espacio interior al círculo y la variable A con el espacio exterior. El teorema booleano que establece **A + A '= 1** puede interpretarse ahora geométricamente de la forma siguiente: siempre es cierto (1 lógico) que un punto "**.**" Está en el interior del círculo o (OR) fuera de él.

Lógicamente, el **1** en **A+A'=1** representa la inevitable verdad que un punta asta dentro a fuera del círculo. Geométricamente el 1 representa el universo de nuestro interés; es decir, la totalidad de los punto del rectángulo.

Figura 3.10.3(b). Por motivos de generalidad hemos considerado un superposición entre los círculos que representan a las variables. El universo ahora se divide en cuatro reglones. Una interior al círculo **A**. pero simultáneamente fuera del círculo **B**; es decir, en el círculo **A** y no en el círculo **B**. Esta región se identifica can la función lógica **AB'**. Las otras regiones son entonces **AB** (dentro de A y B), **AB'** (no en A pero sí en B) y finalmente **A'B'** (no en A y también no en B). Geométricamente, como cualquier punto debe estar en una de las cuatro. regiones, encontramos que:

AB' + AB + A'B + A'B' = 1

Esta ecuación es válida algebraicamente y se verifica fácilmente sin mas que aplicar los teoremas de la sección anterior.

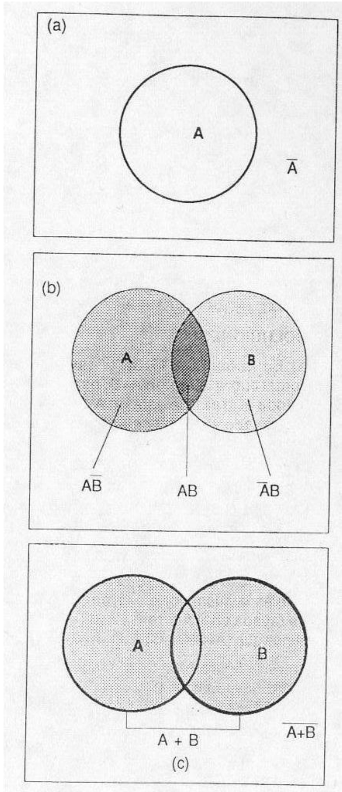


Figura Nº 3.10.3 (a) Diagrama de Venn de una variable; (b) Y (c) diagramas de dos variables. Algunas de las áreas se identifican en términos de su representación boolena.

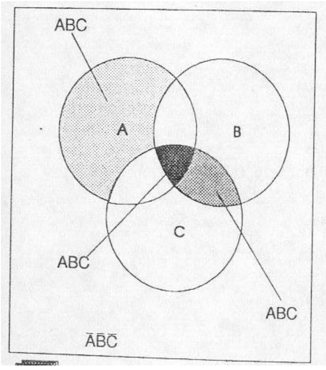


Figura Nº 3.10.4 Diagrama de Venn de tres variables; Algunas de las áreas se identifican en términos de su representación boolena.

Como indica la Figura 3.10.3(c), la región total encerrada por los dos círculos puede también representarse por **A + B**; esto es, cualquier punto en la región sombreada está en A o (OR) **B.** Correspondiente al área no sombreada es **(A + B)'**. Comparando las Figuras 1.10.3(b) y 1.10.3(c) tenemos que **A + B = AB' + AB + A'B** y también que **A'B' = (A+B)'**. El primer resultado se verifica fácilmente mediante los teoremas ya enunciados. El último resultado se reconoce como el teorema de De Morgan.

En la Figura 3.10.3(b) la región de superposición entre **A** y **B** . En el área **AB** los círculos **A** y **B** se cortan entre sí; es decir, se intersectan. Esta consideración contiene la motivación para referirnos a **AB** como la intersección de **A** y **B**, a menudo, se representa por **$A \cap B$.**

De la misma forma **A + B** es la región total encerrada por **A** y **B** y frecuentemente se conoce como la unión de **A** y **B**, se representa por **A U B**. Un diagrama de Venn de tres variables es el de la Figura 3.10.4. Algunas de las áreas se identifican en términos de sus representaciones booleanas. Notar que, como aparece en las figuras 3.10.3(a) y 3.10.3(b), los diagramas de Venn dividen al universo (el rectángulo) en 2^n áreas distintas identificables, donde n es el número de variables manipuladas. Así, el número de estas áreas coincide con el número de filas de la tabla de verdad para el número de variables correspondientes.

Los diagramas de Venn son útiles por permitir una visualización geométrica de las funciones booleanas y pueden también utilizarse, como en el ejemplo siguiente, para establecer o verificar teoremas del álgebra booleana.

Ejemplos :

a) Utilizar un diagrama de Venn para verificar el teorema de la ecuación:

(A+B)(A'+C)=AC+A'B

b) Utilizar un diagrama de Venn para verificar la validez del teorema de la ecuación:

AB+A'C+BC=AB+AC

Soluciones:

a) En la Figura 3.10.5(a) el achurado horizontal cubre la región **A + B**; esto es, cubre todo el área que está en A o (OR) en B. El achurado vertical encierra el área **A'+C**; esto es, el área que está fuera de A o (OR) dentro de C. El achurado doble está en la región **A + B** y (AND) también en la región **A'C**, así que representa **(A + B)(A' + C).** En la Figura 3.10.5(b) el achurado horizontal es AC, y el vertical es A'B. El área total achurada es **A'C + AB.** Finalmente, como el área achurada en la Figura 3.10.5(b) es la misma que el área doblemente achurada en la Figura 3.10.5(a), establecemos que
(A + B)(A' + C) = AC + A'B.

c) En la Figura 3.10.5(c) el área achurada horizontalmente es **AB** y verticalmente **A'C.** El área total achurada es **AB + A'C.** Notemos que esta área contiene a la región BC a pesar de que no la hayamos achurado explícitamente. Por consiguiente **AB + AC** incluye automáticamente a **BC**, así pues tenemos el resultado **AB + A'C = AB + A'C + BC.**

Los diagramas de Venn para más de tres variables no se utilizan demasiado, ya que son bastante difíciles de dibujar y aparentemente confunden.

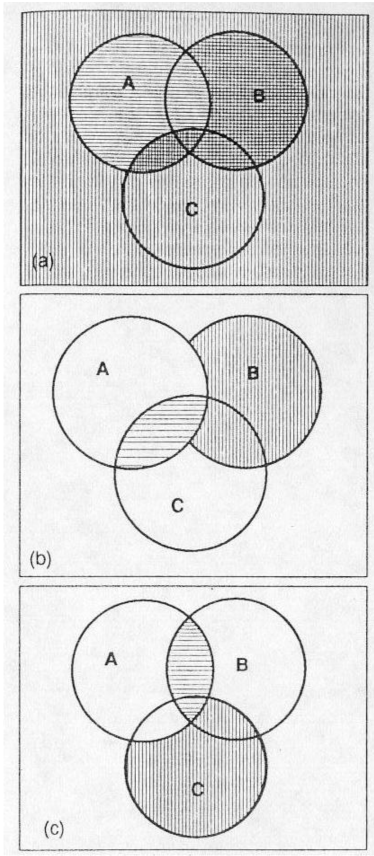


Figura Nº 3.10.5
(a) el sombreado horizontal es A+B. El sombreado vertical es A'+C. El sombreado doble es (A+B)(A'+C).
(b) el sombreado horizontal es AC. El sombreado vertical es AB. El área total es AC+AB.
(c) sombreado horizontal, AB; sombreado vertical A'C. El sombreado total, AB+A'C encierra BC.Diagrama de Venn de tres variables; Algunas de las áreas se identifican en términos de su representación boolena.

3.11 FUNCIÓN BOOLEANA

Una función booleana es una aplicación de A x A x A x ....A en A, siendo A un conjunto cuyos elementos son 0 y 1 y tiene estructura de álgebra de Boole.

Supongamos que cuatro amigos deciden ir al cine si lo quiere la mayoría. Cada uno puede votar si o no. Representemos el voto de cada uno por x_i. La función devolverá sí (1) cuando el número de votos afirmativos sea 3 y en caso contrario devolverá 0.

Si x1 vota 1, x2 vota 0, x3 vota 0 y x4 vota 1 la función booleana devolverá 0.

Producto mínimo (es el número posible de casos) es un producto en el que aparecen todas las variables o sus negaciones.

El número posible de casos es 2^n.

Siguiendo con el ejemplo anterior. Asignamos las letras A, B, C y D a los amigos. Los posibles casos son:

Votos ABCD	Resultado
1111	1
1110	1
1101	1
1100	0
1011	1
1010	0
1001	0
1000	0
0111	1
0110	0
0101	0
0100	0
0011	0
0010	0
0001	0
0000	0

Las funciones booleanas se pueden representar como la suma de productos mínimos (minterms) iguales a 1.

En nuestro ejemplo la función booleana será:

f(A,B,C,D) = ABCD + ABCD' + ABC'D + AB'CD + A'BCD

3.12 FORMAS CANÓNICAS DE UNA FUNCIÓN

Se define **función** en el álgebra de Boole todo conjunto de variables relacionadas entre sí por cualquiera de las operaciones de suma lógica, producto lógico y complementación.

A partir de la tabla de verdad se puede obtener una función algebraica en dos **formas canónicas** diferentes. Dichas formas son:

Primera forma canónica (función con estructura de minterms): La primera forma canónica es suma de productos canónicos, es decir, suna de productos en los que aparecen todas las variables, bien complementadas o bien sin complementar.

Segunda forma canónica (función con estructura de maxterms) : La segunda forma canónica es producto de sunas canónicas . Esa función algebraica se podrá simplificar aplicando directamente las leyes del álgebra de Boole, o bien, sistemáticamente, a través de métodos de reducción que veremos más adelante.

x y z	f(x,y,z)
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

Tabla Nº 3.12.1 Ejemplo de tabla de verdad

De la **Tabla 3.12.1**, como podemos ver se obtienen suna de productos al tomar los **1** de la tabla de verdad.

f(x,y,z) = x' y' z' + x' y z + x y z

De la **Tabla 3.12.1**, como podemos ver se obtienen producto de sumas al tomar los **0** de la tabla de verdad.

f(X,Y,Z) = (X' + Y' + Z') (X' + Y + Z ') (X + Y' + Z) (X + Y + Z')

Los términos productos de la suma stándard se llaman **"minterms",** y los términos sumas del producto standard se llaman **"maxterms".** Por lo tanto, minterm y maxterm contienen todas las variables del problema.

Los términos de una unción de conmutación de n-variables que contienen n o menos variables se llaman **"P"** términos, si ellos son términos productos y **"S"** términos si ellos son términos sumas. El orden de un "**P**" término o "**S**" término define cómo el número de variables ausentes en el término "**P**" ó "**S**".

Para una función de conmutación de n-variables, un término de **n – m** variables donde **m < n** se dice que es de orden **"M".**

Ejemplo 3.12.1 :

f(x,y,z) = x z	n = 3	m = 2	M=1	Término P de orden 1
f(a,b,c,d,e) = b d e’	n = 5	m = 3	M=2	Término P de orden 0
f(x,y,z) = (x + z)	n = 3	m = 2	M=1	Término S de orden 1
f(a,b,c,d,e) = (b + d + e’)	n = 5	m = 3	M=2	Término S de orden 2
Ff(x,y,z) = x y’ z	n = 3	m = 3	M=0	Término P de orden 0

Un **minterm** siempre es un **P término**, pero un **P término** no necesariamente es un **minterm.**

3.13 ALGORITMOS DE SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES LÓGICAS

Existen tres procedimientos básicos a la hora de simplificar las ecuaciones booleanas :

- **Método de simplificación algebraico :** Se realiza aplicando las leyes y teoremas del álgebra de Boole.
- **Métodos gráficos :** Existen bastantes métodos para realizar la simplificación de ecuaciones booleanas, dentro de esta categoría, pero el más ampliamente usado es el **método de mapas de Karnaugh.**
- **Método analítico** : Se utiliza usando tablas, llamado también método de la tabulación o **método de Quine Mc Clusky.**

3.13.1 MAPAS DE KARNAUGH

(representación numérica de los minterm y P-términos)

El método de mapas fue introducido en 1952 por Veitch y posteriormente modificado por Karnaugh.
Están constituidos por una cuadrícula en forma de encasillado cuyo número de casillas depende del número de variables que tenga la función a simplificar. Cada una de las casillas representa las distintas combinaciones de las variables que puedan existir.

Los diagramas de Karnaugh se utilizan para simplificar las funciones booleanas y se logra construyendo una tabla con las variables y sus valores posibles y se agrupan los 1 adyacentes.

Siempre que el número de 1 sea potencia de 2, esto es de la siguiente manera: Si el símbolo para una variable es definida como un literal, entonces las reglas para la representación numérica de minterms y P-términos pueden ser:

a) Literales no complementados en un minterm o P-término son reemplazados por un "1"
b) Literales complementados en un minterm o P-término son reemplazados por un "0".
c) Literales que no aparecen en un minterm o P-término son reemplazadas por un "1", posteriormente se escribe completo el minterm o, P-término con los "1" y "0"resultantes, esta combinación toma el valor decimal según posición de los dígitos binarios.

Estas reglas asumen que los minterms y P-términos son siempre escritos en un orden consistente.

Minterm o P-término	Representación binaria equivalente	Representación decimal equivalente
A' B C D	1 1 1 1	15
A' B C D'	0 1 1 0	6
A C'	1 – 0 - (1101)	13 (1,4)
W X' Z	1 0 – 1 (1011)	11 (2)

El número de dígitos entre paréntesis indica el orden de un P-término y la posición que ocupan de acuerdo al peso de la posición no presente.

f(W,X,Y,Z) = W' X' Y' Z' + W' X' Y Z + W' X Y' Z + W X Y' Z' + W X Y Z + W X' Y
= 0 0 0 0 + 0 0 1 1 + 0 1 0 1 + 1 1 0 0 + 1 1 1 1 + 1 0 0 1
= 0 + 3 + 5 + 12 + 15 + 9

= Σ_1 (0,3,5,9,12,15)

El símbolo "Σ_1" indica que los números entre los paréntesis son minterms cuya lógica o suma (OR) booleana produce "unos". Similarmente "Σ_0 " representa la lógica o suma booleana de minterms, produce "ceros".

Una tercera situación se obtiene cuando ciertas combinaciones de variables no pueden ocurrir o no nunca ocurren, si así fuera, a la salida se le puede asignar arbitrariamente 1 ó 0. Este tipo de condición se conoce con el término de **don't care** o (phi) y se denota por el símbolo (ϕ) y mediante "Σ_ϕ " en la representación numérica de la función.

Ejemplo 3.13.1.1:

En base al siguiente esquema, se desea conocer cuando el nivel del líquido esta sobre el nivel del sensor A y bajo el nivel del sensor B. Los sensores están diseñados de manera que su salida es 1 cuando ellos están en contacto con el líquido y 0 cuando no están en contacto con el líquido.

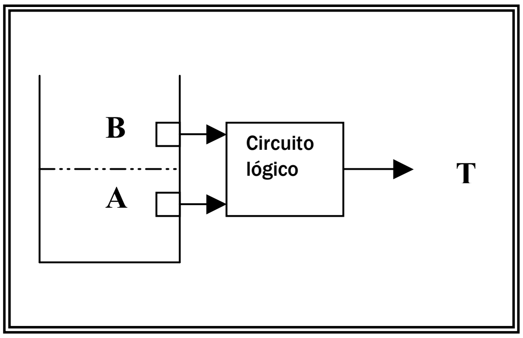


Figura Nº 3.13.1.1 Estanque con líquido a la mitad de él. A y B son sensores

T = 1 si el nivel del líquido está sobre A y bajo B.

Dec	A	B	T
0	0	0	0
1	0	1	ϕ
2	1	0	1
3	1	1	0

$T = \Sigma_1 (2)$

$\overline{T} = \Sigma_0 (0,3) + \Sigma\, \phi\, (1)$

El método de Karnaugh convierte una expresión a otra más simplificada. En nuestro caso, convierte una suma de productos en otra mínima denominada **Minimal Sum Product** (**MSP** o suma de productos minimal) **.** Tiene como características:

- Un mínimo número de términos en la expresión.
- Un mínimo número de variables en cada término de dicha expresión.

Inicialmente poseemos una expresión booleana constituida por una suma de productos de variables, que pueden tomar únicamente los valores de *cero* [1] o *uno*. El resultado de esta expresión es un valor booleano para cada uno de los valores que tomen dichas variables. Dichos valores se van almacenando en una **tabla de verdad** como la que ilustramos en el siguiente ejemplo:

$$F(x, y, z) = x\,y\,z + x'z'$$

X	Y	Z	Resultado
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabla Nº 3.13.1.1 Ejemplo de ilustración para la función F(x,y,z)

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0

Figura 3.13.1.2 Mapa de Karnaugh de 3 variables que representa los minterms de la tabla 5.

Podemos hacer una representación gráfica de dicha tabla de verdad, mediante la matriz que se encuentra al lado, denominada *mapa de Karnaugh*. Así el resultado en rojo obtenido en la tabla de verdad se corresponde con la posición indicada en rojo en la matriz. Cada valor en esta matriz recibe el nombre de **implicante** siendo los valores uno **minterm.**

[1] Las variables se representarán con letras. Los valores que pueden tomar son el cero, que corresponde con el valor booleano falso y se representa con la letra y el símbolo ' ej: x' y el uno que corresponde con el valor booleano verdadero, que se representa con la letra misma ej: x.

3.13.2 FORMAS DE DIBUJAR UN MAPA

Figura Nº 3.13.2.1 Diagrama de Venn para una variable

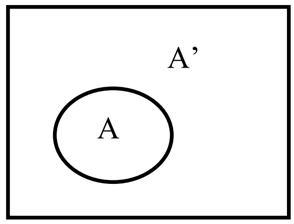


Figura Nº 3.13.2.2
Mapa de Karnaugh de 1 variable.

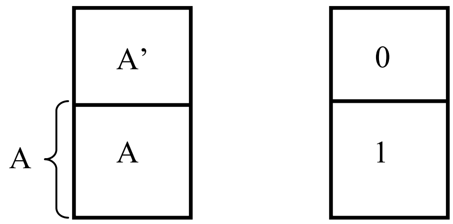


Figura Nº 3.13.2.3
Mapa de Karnaugh de 2 variables.

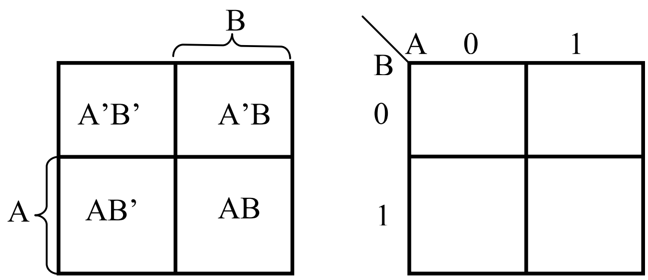


Figura Nº 3.13.2.4
Mapa de Karnaugh de 3 variables.

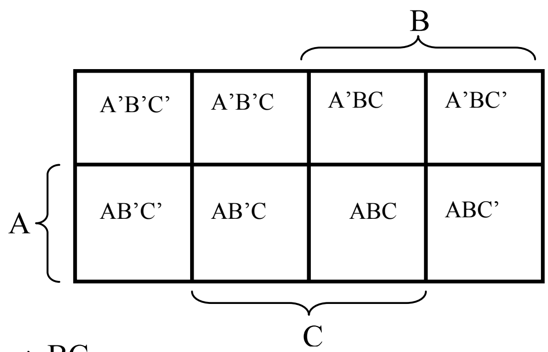


Figura Nº 3.13.2.5
Mapa de Karnaugh de 3 variables (otra forma de representarlo.

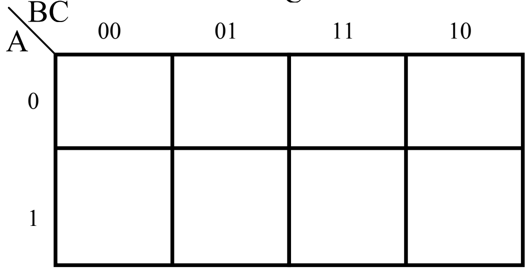


Figura Nº 3.13.2.6
Mapa de Karnaugh de 4 variables.

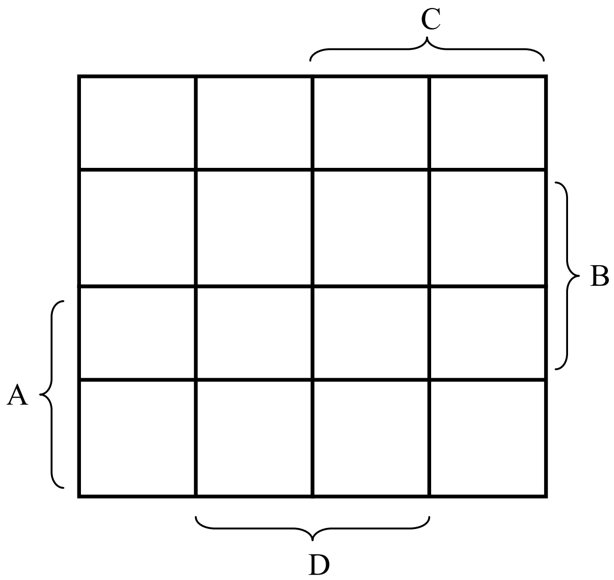
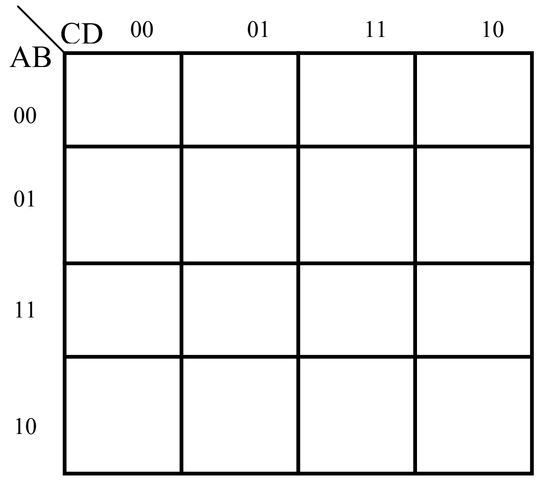


Figura Nº 3.13.2.7
Mapa de Karnaugh de 4 variables (otra forma de representarlo.



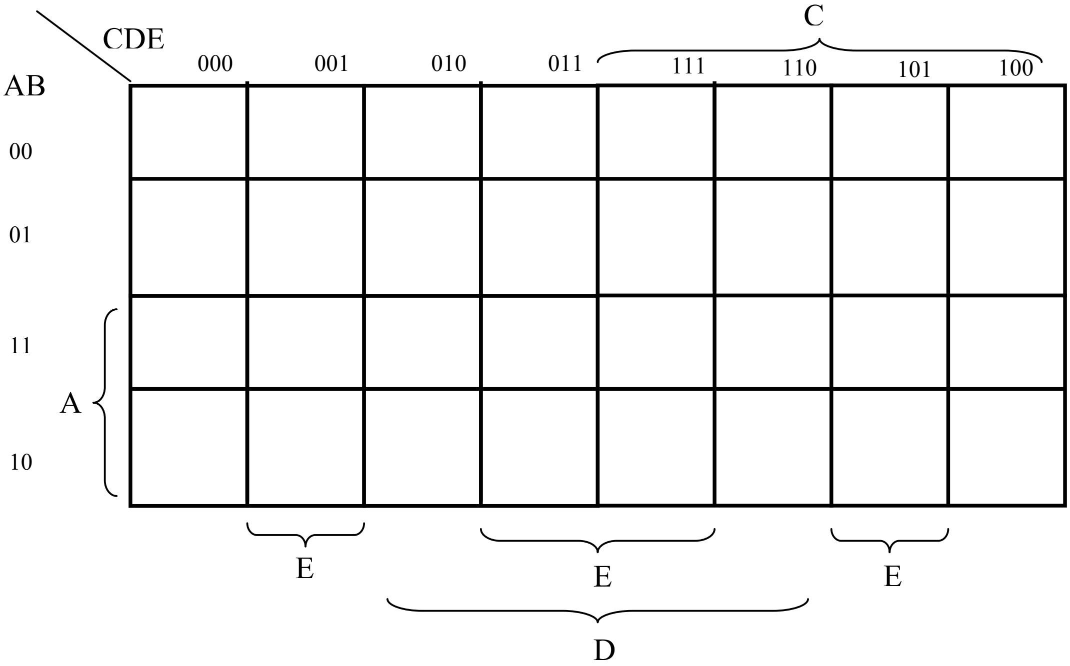


Figura Nº 3.13.2.8
Mapa de Karnaugh
de 5 variables.

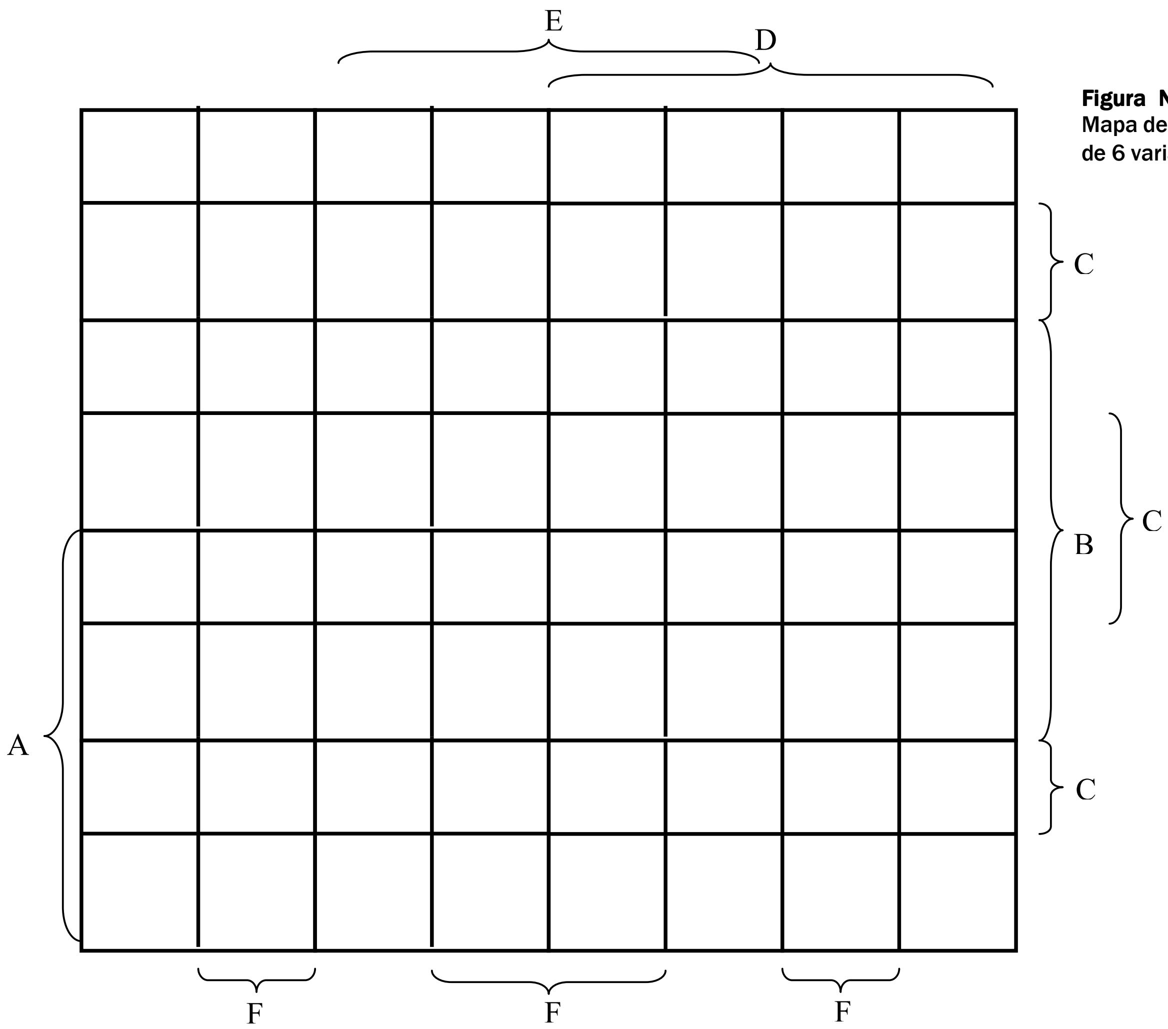
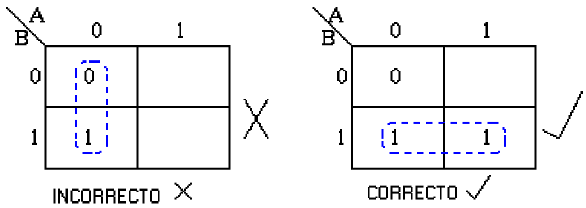


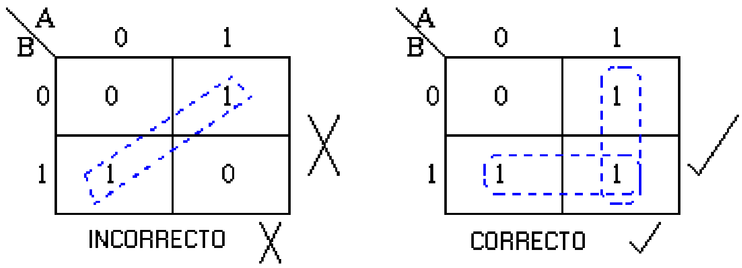
Figura Nº 3.13.2.9
Mapa de Karnaugh
de 6 variables.

3.13.3 REGLAS DE SIMPLIFICACIÓN

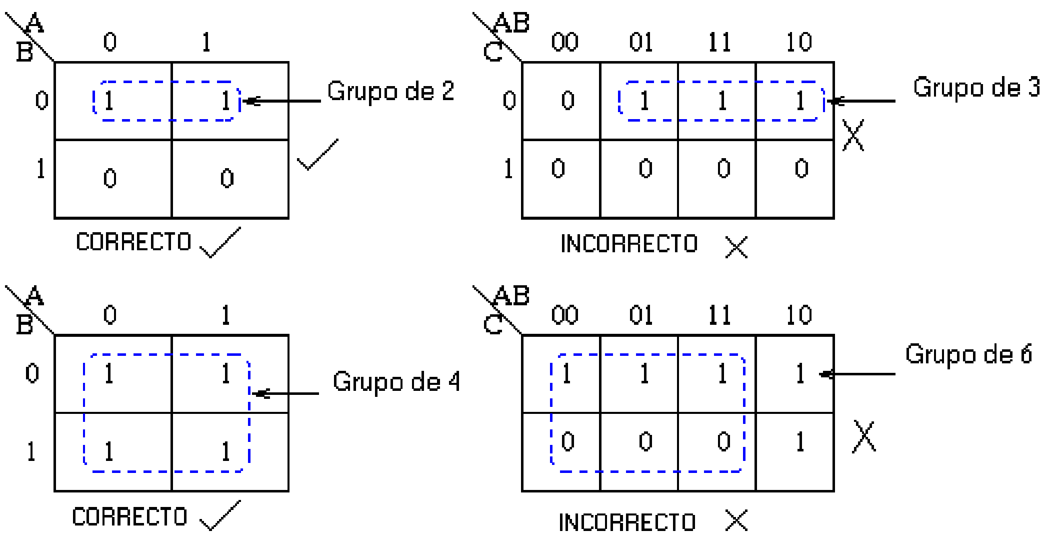
1. Las agrupaciones son exclusivamente de unos. Esto implica que ningún grupo puede contener ningún cero.



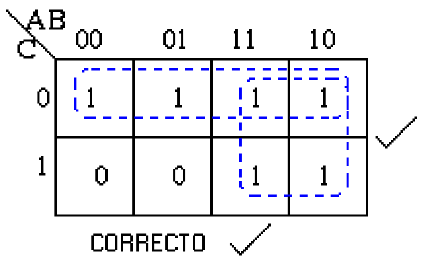
2. Las agrupaciones únicamente pueden hacerse en horizontal y vertical. Esto implica que las diagonales están prohibidas.

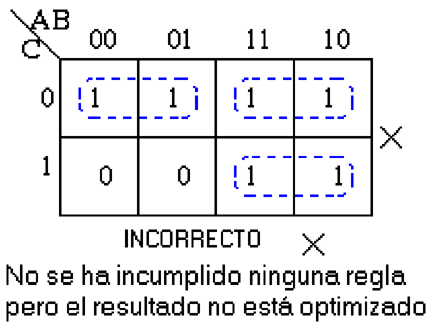


3. Los grupos han de contener 2^n elementos. Es decir que cada grupo tendrá 1,2,4,8... número de unos.

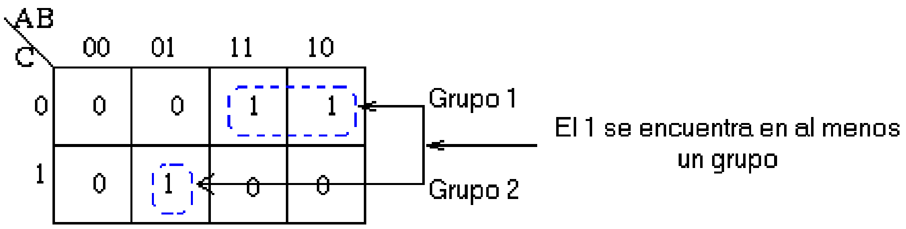


4. **Cada grupo ha de ser tan grande como sea posible.** Tal y como lo ilustramos en el ejemplo.

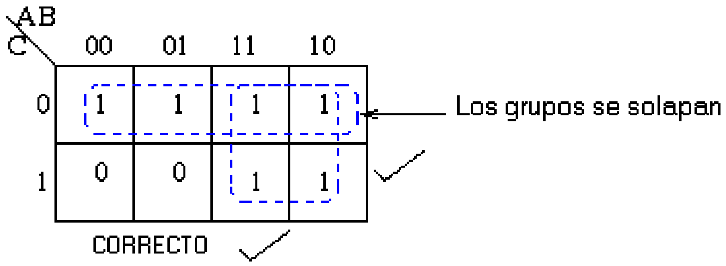


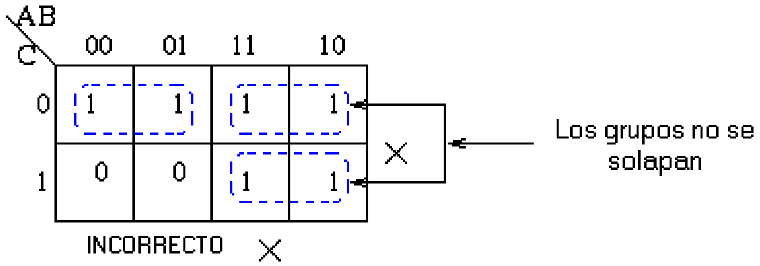


5. **Todos los unos tienen que pertenecer como mínimo a un grupo.** Aunque pueden pertenecer a más de uno.

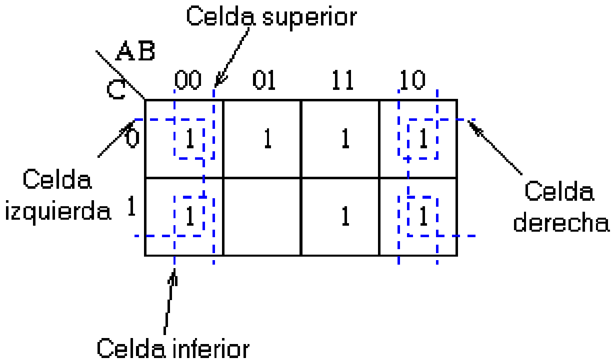


6. **Pueden existir solapamiento de grupos.**

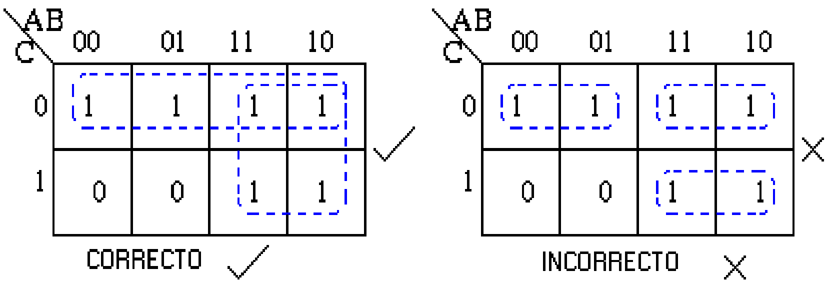




7. La formación de grupos también se puede producir con las celdas extremas de la tabla. De tal forma que la parte inferior se podría agrupar con la superior y la izquierda con la derecha tal y como se explica en el ejemplo. A estas celdas se les denomina celdas adyacentes.



8. Tiene que resultar el menor número de grupos posibles siempre y cuando no contradiga ninguna de las reglas anteriores. Esto es el número de grupos ha de ser minimal.



3.13.4 METODOLOGÍA

Vamos a indicar cada uno de los pasos para obtener la expresión MSP (mínima suma de productos). Para ello vamos a ilustrarlo con el ejemplo:

F(x, y, z) = x' y' z' + x' y' z + x' y z'+ x y' z'+ x y z'

Los pasos a seguir para conseguir reducir esta expresión son:

1. **Convertir la expresión a una suma de productos si es necesario.** Esto se puede realizar de varias maneras:
   - Algebraicamente.
   - Construyendo una tabla de verdad, trasladando los valores al mapa de Karnaugh. Esta es la forma que vamos a utilizar.

X	Y	Z	Resultado
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabla No 3.13.4.1 Ejemplo de ilustración para la función F(x,y,z)

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

Figura Nº 3.13.4.1 Mapa de Karnaugh de 3 variables que representa los minterms de la tabla 3.13.4.1.

2. **Cubrir todos los unos del mapa mediante rectángulos de 2^N elementos**, donde **N = 0 ... número de variables.** Ninguno de esos rectángulos debe contener ningún cero (tal y como indicábamos en el apartado anterior).

   - Para minimizar el número de términos resultantes se hará el mínimo número posible de rectángulos que cubran todos los unos.
   - Para minimizar el número de variables se hará cada rectángulo tan grande como sea posible.

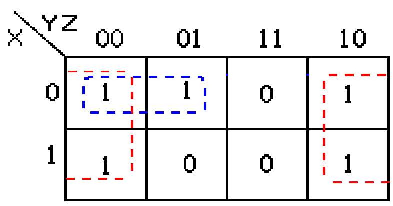


Figura Nº 3.13.4.2 Mapa de Karnaugh de 3 variables que representa la agrupación de minterms de la tabla 3.13.4.1.

Véase que en este caso se ha unido la columna izquierda con la derecha para formar un único rectángulo.

3. Encontrar la MSP (suma de productos minimal). Ojo porque podemos encontrarnos con que puede haber más de una MSP.

- Cada rectángulo pertenece a un término producto.
- Cada término se define encontrando las variables que hay en común en tal rectángulo.

En nuestro ejemplo tenemos F(X, Y, Z) = **Z'** + **X'Y'** nótese que las variables resultado son las que tienen un valor común en cada rectángulo.

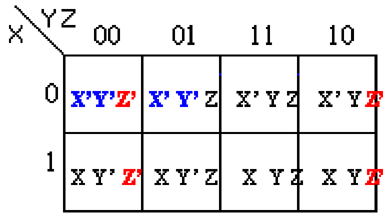


Figura Nº 3.13.4.3 Mapa de Karnaugh de 3 variables que muestra el valor común de cada rectángulo.

- ## Rectángulos y productos.

Cada rectángulo representa un término. El tamaño del rectángulo y el del término resultante son inversamente, es decir que, cuanto más largo sea el rectángulo menor será el tamaño del término final.

En general, si tenemos una función con **n** variables :

- Un rectángulo que ocupa una celda equivale a un término con **n** variables.
- Un rectángulo que ocupa dos celdas equivale a un término con **n-1** variables.
- Un rectángulo que ocupa 2^n celdas equivale al término de valor 1.

Por lo tanto, para encontrar el MSP se debe:

- *Minimizar* el número de rectángulos que se hacen en el mapa de Karnaugh, para minimizar el número de términos resultantes.
- *Maximizar* el tamaño de cada rectángulo, para minimizar el número de variables de cada término resultante.

- ## Agrupación de rectángulos.

Cuando tenemos distintas posibilidades de agrupar rectángulos hay que seguir ciertos criterios:

1. Localiza todos los rectángulos más grandes posibles, agrupando todos los unos. Estos se llamarán **implicantes primos**.
2. Si alguno de los rectángulos anteriores contiene algún uno que no aparece en ningún otro rectángulo entonces es un **implicante primo esencial.** Éstos han de aparecer en el resultado final de manera obligatoria.

El resto de implicantes primos se podrán combinar para obtener distintas soluciones.

Véase este ejemplo que ilustra lo que les planteamos. Aquí los implicantes primos son cada uno de los diferentes rectángulos obtenidos. Los implicantes primos esenciales son el rectángulo rojo y el verde, por contener unos que no son cubiertos por otros rectángulos. Así todas las posibles soluciones han de contener estos dos implicantes.

Solución: F(X, Y, Z, T) = X'Y' + XYT' + XZT

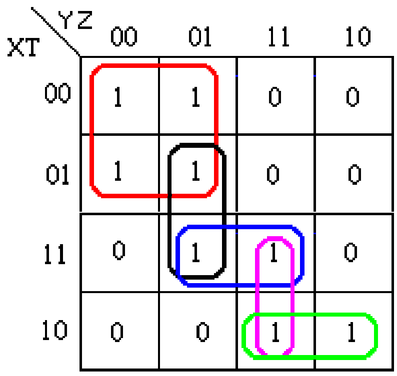


Figura Nº 3.13.4.3 Mapa de Karnaugh de 4 variables que muestra los implicantes primos y los esenciales.

3.13.5 LA FUNCIÓN MÍNIMA Y SUS PROPIEDADES.

Implicantes: Una función de conmutación f(x1,x2,x3,......,xn) se dice que **"cubre"** a otra función g(x1,x2,x3,.....,xn) denotado por **f** $\supseteq$ **g**, si **f** toma el valor 1 toda vez que lo hace. As, si **f cubre** a **g**, entonces éste tendrá un 1 en todas las filas de la tabla de verdad en la cual **g** tiene el valor 1. Si **f cubre** a **g** y al mismo tiempo **g cubre** a **f**, entonces **f** y **g** son equivalentes.

Sea f(xa,x2,x3,......,xn) una función de conmutación y h(xa,x2,x3,......,xn) un producto de literales.

Si **f cubre** a **h**, entonces se dice que **h implica** a **f** o **h** es un **implicante** de **f** **(h $\Rightarrow$ f).**

Ejemplo 3.13.5.1: Si f = WX + YZ y h = WXY', se dice entonces que f cubre a h, h $\Rightarrow$ f
Esto es porque WX = WXY + WXY'

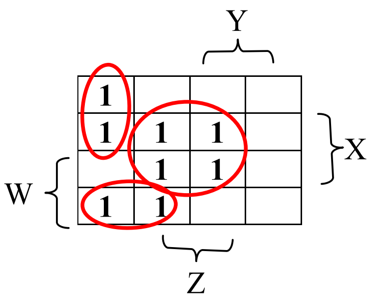
Implicante Primo: Un implicante primo **p** de una función **f** es un término producto el cual es cubierto por **f**. Alternativamente se establece, **p** es un implicante primo si y solo si **p** implica **f**, pero no implica ningún producto con menor literales los cuales a su vez también implica **f**. El conjunto de todos los implicantes primos de **f** se denotará por **P.**

Ejemplo 3.13.5.2: x'y es un implicante primo de f = x'y + xz + y'z'

En resumen, si a una función de sumas de productos se le aplica en forma reiterada el teorema Aa + Aa' = A, se obtendrán los implicantes primos. Por lo tanto un término-producto que no puede ser combinado con otros términos-producto para obtener un término aún con menos literales, es un implicante primo.

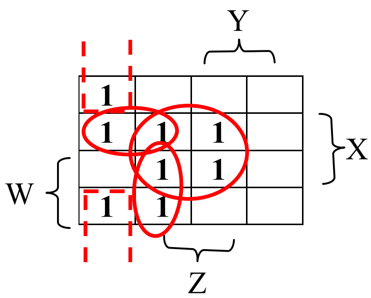
En un mapa un producto irreductible corresponde a un sub-cubo que no está contenido en ningún sub-cubo mayor. Consecuentemente, el conjunto **P** de los productos correspondiente a todos los sub-cubos los cuales no están contenidos en ningún sub cubo mayor.

Ejemplo 3.13.5.3: Considerar f(w,x,y,z) = $\sum_1$(0,4,5,7,8,9,13,15)



f = x'y'z' + wx'y' + xz

Figura Nº 3.13.5.1 única expresión mínima irreductible



f = x'y'z' + w'xy' + xz + wy'z

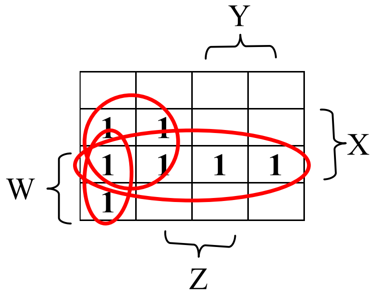
Figura Nº 3.13.5.2 expresión irredundante

P = { w'y'z', wx'y', xz, x'y'z', w'xy', wy'z } (implicantes primos)

→ **Se hace notar que xyz no es implicante primo.**

Implicante primo esencial: Un implicante primo **p** de un a función **f** se dice que es un implicante primo esencial si éste cubre al menos un minterm de **f** el cual no es cubierto por ningún otro implicante primo. Puesto que en todo minterm de **f** debe ser cubierto por una expresión para f, todos los implicantes primos esenciales deben estar contenidos en cualquier expresión irredundante para esta función.

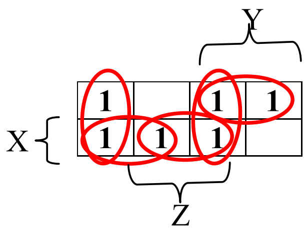
Ejemplo 3.13.5.4: f(w,x,y,z) = $\sum_1(4,5,8,8,12,13,14,15)$

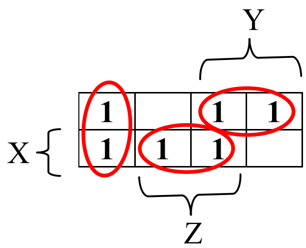


f mín = wy'z' + xy' + wx

Figura Nº 3.13.5.3 son todos implicantes primos esenciales.

Ejemplo 3.13.5.5: f(x,y,z) = $\sum_1(0,2,3,4,5,7)$





f(x,y,z) = **y'z** + xy' + **xz** + yz + **x'y** + x'z'

Figura Nº 3.13.5.4 función irredundante única

f(x,y,z) = **y'z'** + **xz** + **x'y**

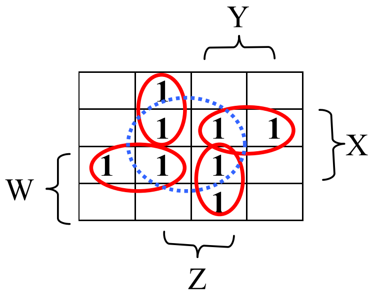
Figura Nº 3.13.5.5 función mínima, no es

P = { **y'z'**, xy', **xz**, yz, **x'y**, x'z'} (ninguno es esencial)

El implicante primo **y'z'** en la función mínima es cubierto por los implicantes primos **x'z'** y **xy';** el implicante primo xz es cubierto por los implicantes primos **xy'** y **xz**; el implicante primo **x'y** es cubierto por los implicantes primos **x'y** y **x'z'**, por lo tanto tampoco son implicantes primos esenciales.

Por lo tanto: EL conjunto de todos los implicantes primos esenciales deben estar contenidos en cualquier expresión de suma de productos irredundantes, mientras que cualquier implicante primo cubierto por la suma de implicantes primos esenciales **no debe** estar contenido en una expresión irredundante.

Ejemplo 3.13.5.6: $f(w,x,y,z) = \sum 1(1,5,6,7,11,12,13,15)$



f = wxy' + w'y'z + wyz + w'xy

Figura Nº 3.13.5.6 El implicante primo **xz** es cubierto por la suma de cuatro implicantes primos esenciales y por lo tanto no debe estar contenido en ninguna expresión irredundante de **f.**

Ahora se puede resumir el procedimiento para la obtención de una expresión mínima de suma de productos para una función **f**:

- Determinar todos los implicantes primos e incluirlos en la expresión mínima.
- Retirar de la lista de implicantes primos todos aquellos que están cubiertos por los implicantes primos esenciales.
- Si el conjunto obtenido en el paso anterior cubre todos los minterms de **f**, entonces este es la única expresión mínima. De lo contrario, seleccionar implicantes primos adicionales de tal forma que la función **f** sea cubierta completamente y que el número total y tamaño de los implicantes primos agregados sean mínimos.

3.14 MÉTODO DE QUINE MCCLUSKEY

3.14.1 INTRODUCCIÓN

En matemáticas las expresiones booleanas se simplifican por numerosas razones:

- Una expresión más simple es más fácil de entender y tiene menos posibilidades de error a la hora de su interpretación.
- Una expresión simplificada suelen ser más eficiente y efectiva cuando se implementan en la práctica, como en el caso de circuitos eléctricos o en determinados algoritmos.

El método de *Quine-McCluskey* es particularmente útil cuando se tienen funciones con un gran número de variables, no es el caso del método de Karnaugh, que se hace impracticable con más de cinco variables. En nuestro caso, como el máximo número de variables será cuatro podremos utilizar conjuntamente ambos métodos.

Una expresión booleana se compone de variables y términos. Para este método las variables sólo podrán tener un valor numérico de *cero* (el correspondiente al valor de verdad false) o *uno* (el correspondiente al valor de verdad true) y se designarán mediante una letra.

Como notación se designará x si la variable contiene el valor uno, x' en caso de que contenga el valor cero.

Por otra parte, las variables se relacionarán entre sí únicamente mediante operaciones lógicas *and* para formar términos y mediante *or* para relacionarse con otros términos constituyendo una **suma de productos.** Ésta debe de ser canónica, es decir:

- Cada variable se usa una vez en cada término. A dichos términos se les llama **términos canónicos**.

Ejemplo 3.14.1.1 f(x,y,j) = x'y z +x y'z

x'y z se representa con 011, donde x = 0, y = 1, z = 1

x y'z se representa con 101, donde x = 1, y = 0, z = 1

3.14.2 REGLAS BÁSICAS

3.14.2.1 REGLA DE LA ADYACENCIA.

Para que dos términos *se combinen* es necesario que sean **adyacentes**, es decir que la diferencia entre el número de unos que tengan ambos términos sea uno y además difieran en el valor de una única variable:

```
x y z
0 1 1
1 1 1
-----
- 1 1
```

Como podemos apreciar, la diferencia de unos entre ambos elementos es uno, (3-2). Además ambos términos difieren únicamente en la variable x con lo que son adyacentes.

```
x y z
0 0 1
1 1 0
-----
- - -
```

Aunque en este caso la diferencia de unos entre ambos es uno (3-2) ambos términos difieren en todas sus variables, con lo que se concluye que no son adyacentes.

3.14.2.2 REGLA DE ELIMINACIÓN.

Este método usa repetidamente la ley que dice x + x’ = 1.

3.14.3 METODOLOGÍA

Para favorecer la explicación suponemos la función de cuatro variables:

F(x, y, z, t) = x'y'z't + x y z' t + x y'z t + x y z t + x'y'z't'

1. Como cada término consta de un conjunto de ceros y unos entonces representa un número en binario, que nos servirá de ayuda como *índice* cuando lo traducimos a decimal.

Así en nuestro ejemplo tenemos los cinco términos canónicos:

0000 = **0**
0001 = **1**
1101 = **13**
1011 = **11**
1111 = **15**

Por lo tanto nuestra función resultante sería la suma de los índices anteriores:

$$F(x, y, z, t) = \sum(\mathbf{0, 1, 11, 13, 15})$$

2. Se crea la tabla inicial ordenando de menor a mayor número de unos, de tal forma que queden agrupados en grupos con la misma cantidad de unos (habrá tantos grupos como número de variables más uno). Sólo se pondrán en la tabla los términos que pertenezcan a la fórmula que queremos simplificar. En nuestro caso:

Término	Indice
0000	0
0001	1
1101	13
1011	11
1111	15

Cada color representa un grupo de términos con el mismo número de unos.

Tabla Nº 3.14.3.1 Términos e índices primer paso

3. Hay que encontrar elementos adyacentes. Para ello comparamos cada término de un grupo con todos los términos del grupo inmediatamente posterior (éste ha que tener un número de unos superior en una unidad al grupo anterior). El elemento adyacente reemplazará a los dos términos que se hayan comparado.
Si un elemento no es adyacente con ninguno otro se le llamará **término primo.** Este término se añadirá a las tablas siguientes dada su imposibilidad de compararse con ninguno otro. Al comparar elementos adyacentes de nuestra tabla ejemplo se obtienen los siguientes resultados:

0000	0001	0001	1101	1011
0001	1101	1101	1111	1111
000-	- 01	- 01	**11-1**	**1-11**

Tabla Nº 3.14.3.2 Términos e índices segundo paso

De estos resultados únicamente los que están en negrita son los adyacentes, que se incorporarán a la tabla segunda. Los dos últimos son del mismo color debido a que tienen el mismo número de unos. En este primer paso no hay ningún término primo.

Término	Indices
000-	0-1
11-1	13-15
1-11	11-15

Tabla Nº 3.14.3.3 Términos e índices tercer paso

4. La operación anterior se repite hasta que todos los elementos que queden en la tabla sean primos. Esto supondría que ya no se podría aplicar el algoritmo. En nuestro caso ya no se puede reducir más porque la diferencia entre el número de unos del primer grupo con la del tercero es de 3.Esto implica que todos los números son primos.

5. Una vez tengamos la tabla final, eliminando elementos repetidos si los hubiese, se va a tratar de eliminar los términos primos que sean redundantes mediante una tabla con las siguientes características:

- Cada columna representa uno de los números índices de la fórmula conseguida anteriormente:

  $F(x, y, z, t) = \sum_{4} (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{15})$

- Cada fila representa el índice de cada término primo de la tabla final.
- La primera columna indica el valor del índice de cada término primo. La primera fila indica los índices que ha de cumplir la función. Cada X en una columna indica el índice que cumple cada término. Por ejemplo: el índice 0-1, que corresponde al término 000- cumple los índices 0 y 1.

Término / Índice	0	1	11	13	15
000- / 0-1	X	X			
11-1 / 13-15				X	X
1-11 / 11-15			X		X

Tabla Nº 3.14.3.4 Representación de implicantes primos y esenciales

- Los índices que aparezcan en un único término primo indican que dicho término es un **término primo esencial**, es decir que obligatoriamente pertenece a la solución. Tal es el caso del índice cero, que hace que el término primero se incluya en la solución, el índice 13 , que hace lo mismo para el segundo término y del 11 que hace lo consecuente con el tercer término.
- En este caso la tabla no ha reducido el número de términos de la solución ya que todos los términos primos son esenciales. Esto quiere decir que la solución es única.
- En cualquier otro caso se ha de escoger de entre los restantes de tal manera que se cubran todos los índices. Esto nos llevaría a múltiples soluciones. Una forma de realizar la selección de los términos restantes es utilizando las siguientes definiciones:
- Una fila **A domina a una B** si marca todos los índices que B y además otros que B no marca.
- Las filas que cubren los mismos índices darán lugar a soluciones múltiples.

6. La función resultante se obtendrá de la siguiente manera:

- Sustituyo cada elemento de { 000-, 11-1, 1-11 } por su correspondiente grupo de variables, recuerda que un cero se corresponde con la variable negada, un uno con la variable normal y la raya indica la ausencia de la variable. Con ello la función queda:

  F(x, y, z, t) = x'y'z' + x y t + x z t

  Que es claramente más pequeña que la que teníamos al principio.

3.14.3 RESUMEN DEL MÉTODO DE MCCLUSKY

1. Arreglar los minterms en grupos, tal que cada grupo tenga el mismo número de unos en la representación binaria. Partir con el grupo que tenga menos unos y continuar con los grupos con unos incrementándose. El número de unos en un término es llamado el **índice** de ese término.
2. Comparar cada término del grupo de índice más bajo con cada término de los grupos sucesivos.
3. Aplicar el teorema **Aa + Aa' = A** donde sea posible.
4. Dos términos de grupos adyacentes son combinables si la representación binaria difiere justo en un dígito en la misma posición; si así ocurre el término resultante tendrá un (-) en la posición donde ocurrió el cambio. Este nuevo término se escribe en una nueva tabla a la derecha, un signo de visto bueno (√) es colocado en aquellos términos que ya hayan sido combinados con al menos un término. (Notar que cada término puede ser combinado con varios términos, pero sólo un visto bueno es requerido).
5. Los términos generados en el paso anterior son comparados ahora de la misma manera.
6. El proceso continúa hasta que no sea posible más combinaciones.
7. Los términos que no tienen visto bueno constituyen el conjunto de implicantes primos.

Ejemplo 3.14.4.1: Sea la función f(w,x,y,z) = Σ_1 (0,1,2,5,7,8,9,10,13,15).
Hallar sus implicantes primos.

	w	x	y	z	
0	0	0	0	0	√
1	0	0	0	1	√
2	0	0	1	0	√
8	1	0	0	0	√
5	0	1	0	1	√
9	1	0	0	1	√
10	1	0	1	0	√
7	0	1	1	1	√
13	1	1	0	1	√
15	1	1	1	1	√

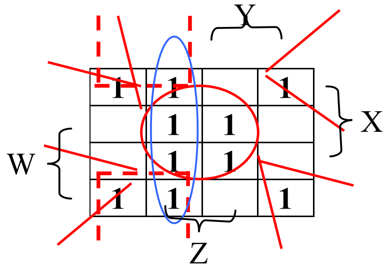
	w	x	y	z	
0,1	0	0	0	-	√
1,2	0	0	-	0	√
0,8	-	0	0	0	√
1,5	0	-	0	1	√
1,9	-	0	0	1	√
2,10	-	0	1	0	√
8,9	1	0	0	-	√
8,10	1	0	-	0	√
5,7	0	1	-	1	√
5,13	-	1	0	1	√
9,13	1	-	0	1	√
7,15	-	1	1	1	√
13,15	1	1	-	1	√

	w	x	y	z	
0,1,8,9	-	0	0	-	**A**
0,2,8,10	-	0	-	0	**B**
0,8,1,9	-	0	0	-	
0,8,2,10	-	0	-	0	
1,5,9,13	-	-	0	1	**C**
1,9,5,13	-	-	0	1	
5,7,13,15	-	1	-	1	**D**

Tabla N° 3.14.4.1 Ejemplo de pasos para hallar los implicantes primos

P = { X'Y', X'Z', Y'Z, XZ }

El mismo problema resuelto por Karnaugh:



f =**xz** + **x'z'** + y'z + **x'y'**

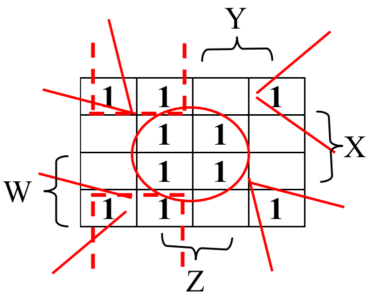


Figura N° 3.14.4.1 Representacion del problema anterior por mapas de Karnaugh

f =**xz** + **x'z'** + **x'y'**

3.14.5 REPRESENTACIÓN DECIMAL.

Dos minterms pueden ser combinados sólo si ellos difieren en una potencia de dos.

Ejemplo 3.14.5.1: Si consideramos la función $f(w,x,y,z) = \Sigma_1 (0,1,8,9)$, los minterms 1 y 9 difieren en $2^3 = 8$, consecuentemente la variable **w** cuyo peso es 8 es eliminada. Esto se denota por: 1,9 (8)

Considere ahora la función

$f(v,w,x,y,z) = \Sigma_1 (13,15,17,18,19,20,21,23,25,27,29,31) + \Sigma_\emptyset (1,2,12,24)$

1	√	1,17 (16)	**A**	17,19,21,23 (2,4)	√	17,19,21,23,25,27,29,31 (2,4,8)	**H**
2	√	2,18 (16)	**B**	17,19,25,27 (2,8)	√		
12	√	12,13 (1)	**C**	17,21,25,29 (4,8)	√		
17	√	17,19 (2)	√	13,15,29,31 (2,16)	**G**		
18	√	17,21 (4)	√	19,23,27,31 (4,8)	√		
20	√	17,25 (8)	√	21,23,29,31 (2,8)	√		
24	√	18,19 (1)	**D**	25,27,29,31 (2,4)	√		
13	√	20,21 (1)	**E**				
19	√	24,25 (1)	**F**				
21	√	13,15 (2)	√				
25	√	13,29 (16)	√				
15	√	19,23 (4)	√				
23	√	19,27 (8)	√				
27	√	21,23 (2)	√				
29	√	21,29 (8)	√				
31	√	25,27 (2)	√				
		25,29 (4)	√				
		15,31 (16)	√				
		23,31 (8)	√				
		27,31 (4)	√				
		29,31 (2)	√				

IMPLICANTES PRIMOS:

A	1,17 (16)	00001 10001	**w'x'y'z**
B	2,18 (16)	00010 10010	**w'x'yz'**
C	12,13 (1)	01100 01101	**v'wxy'**
D	18,19 (1)	10010 10011	**vw'x'y**
E	20,21 (1)	10100 10101	**vw'xy'**
F	24,25 (1)	11000 11001	**vwx'y'**
G	13,15,29,31 (2,16)	01101 01111 11101 11111	**wxz**
H	17,19,21,23,25,27,29,31 (2,4,8)	10001 10011 10101 10111	
		11001 11011 11101 11111	**vz**

P = { w'x'y'z, w'x'yz', v'wxy', vw'x'y, vw'xy', vwx'y', wxz, vz }

La selección de los implicantes primos para obtener la función mínima es realizada con la ayuda de la carta de implicantes primos.

3.14.6 CARTA DE IMPLICANTE PRIMOS.

La carta de implicantes primos muestra en forma gráfica las relaciones de cubrimiento entre los implicantes primos y los minterms de la función. Consiste de un arreglo de **u** columnas que representan los minterms y **v** filas que representan los implicantes primos.

La entrada a la i-ésima fila en la carta se hace colocando **x's** en las intersecciones con las columnas, correspondiente a los minterms cubierto por el i-esimo implicante primo.

Ejemplo 3.14.6.1: La carta de implicantes primos para la función f(w,x,y,z) = Σ_1 (0,1,2,5,7,8,9,10,13,15) con sus respectivos implicantes primos es la siguiente;

	0	1	2	5	7	8	9	10	13	15	
	w'x'y'z'	w'x'y'z	w'x'yz'	w'xyz	wx'y'z'	wx'y'z	wx'yz'	wx'yz	wxy'z	wxyz	
A=x'y'	X	X				X	X				← Implicante Primo Esencial
B=x'z'	X		Ж			X		Ж			
C=y'z		X		X			X		X		
D=xz				X	Ж				X	Ж	← Implicante Primo Esencial

Tabla Nº 3.14.6.1 Carta de implicantes primos

f_{min} = x'z' + xz + x'y'

o

f_{min} = x'z' + xz + y'z

- En la carta de implicantes primos no aparecen los don't care.
- Una vez obtenido los Implicantes Primos Esenciales, se obtiene una tabla de Implicantes Primos reducida para obtener con más claridad el resto de los Implicantes primos se puede utilizar Karnaugh.

3.14.7 REFERENCIAS

[1] QUINE, O. **O Sentido da Nova Lógica**. Son Paulo, Editora da USP, 1942.

[2] GRIES, D. **The Science of Programming**. New York, The MIT Press, 1986.

[3] ORE, O. **Number Theory and Its History**. N. York, Dover Publications, Inc, 1976.

[4] ANDREWS, G. E. **Number Theory**. New York, Dover Publications, Inc, 1971.

[5] TAUB, H. **Circuitos Digitais e Microprocessadores**. Rio de Janeiro, McGraw-Hill, 1984.

[6] PALMER, J.E.; PERLMAN, D.E. **Schaum's Outline of Introduction to Digital Circuits**. New York, McGraw-Hill, 1993.

[7] GILLINGS, R.J. **Mathematics in the Time of the Pharaohs**. New York, Dover Publishing, Inc, 1972.

[8] **Pensamento Crítico da San Jose State University´s**
http://www2.sjsu.edu/depts/itl/graphics/main.html

[9] **Una Introducción a la Enseñanza de la Lógica como Herramienta,**
http://www.cs.cornell.edu/Info/People/gries/Logic/Introduction.html

[10] ARIAS, C. "**Apuntes del curso de Sistemas digitales**", Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad de Santiago de Chile, 1991.

[11] ANGELINES T., SÁNCHEZ Mª GLORIA, "**Sistema De Ayuda A La Enseñanza Para Realizar Mapas De Karnaugh**", Departamento de Matemática Aplicada Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, España
http://www.dma.fi.upm.es/java/matematicadiscreta/karnaugh/

[12] PEÑA, E. "**Apuntes de Clases de Arquitecturas de Computadores**", Departamento de Ingeniería en Computación Universidad de Magallanes 2000.

Software de ayuda.

[13] Mapas de Karnaugh para 4 variables, One Gram Software
http://puz.com/sw/karnaugh/karnaugh_12.htm